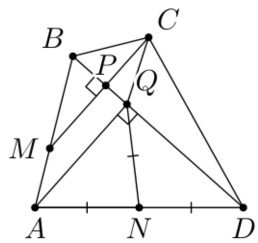
XV МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Решения заданий заключительного этапа, 1 день

1. *На доске написаны натуральные числа от 1 до 1000, по одному разу каждое. Вася может стереть любые два числа и записать вместо них одно: их наибольший общий делитель или их наименьшее общее кратное. Через 999 таких операций на доске осталось одно число, равное натуральной степени десятки. Какое наибольшее значение она может принимать?* (С. Берлов)

Ответ. Четвертую. **Решение**. Пример. Сначала получаем 10^4 = НОК(16, 625). Затем, последовательно беря НОД(1, n) = 1 для всех оставшихся n от 2 до 1000, оставляем на доске только 10^4 и 1, и, наконец, берем НОК(10^4, 1) = 10^4. Оценка. Заметим, что если m и n не делятся на 5^5, то не делятся на 5^5 и их НОД и НОК. Так как ни одно из натуральных чисел от 1 до 1000 не делится на $5^5 = 3125$, мы операциями взятия НОД и НОК не сможем получить степень десятки выше четвертой.

2. *Точка N — середина стороны AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$, а точка M на стороне AB такова, что $CM \perp BD$. Докажите, что если $BM > MA$, то $2BC+AD > 2CN$.* (С. Берлов)



Решение. Обозначим через P точку пересечения CM и BD. Опустим перпендикуляр AQ на прямую BD. Поскольку $BM > AM$, то по теореме Фалеса $BP > PQ$, откуда $BC > CQ$. Но, поскольку угол AQD прямой, $QN = AD/2$. В силу неравенства треугольника, $CN \le CQ+QN < BC+AD/2$, откуда $2BC+AD > 2CN$.

3. *Среди натуральных чисел a_1, ..., a_k, нет одинаковых, а разность между наибольшим и наименьшим из них меньше 1000. При каком наибольшем k может случиться, что все квадратные уравнения $a_ix^2+2a_{i+1}x+a_{i+2} = 0$, где $1 \le i \le k-2$, не имеют корней?* (И. Богданов)

Ответ. При $k = 88$. **Решение**. Пусть ряд $a_1, \ldots, a_k$ удовлетворяет условию задачи. Отсутствие корней у указанных в условии уравнений равносильно выполнению неравенства $(a_{i+1})^2 < a_ia_{i+2}$ (*) при всех i от 1 до $k-2$.

Оценка. *Лемма*. Если $0 < a < b < c$ и $b^2 < ac$, то $b-a < c-b$. *Доказательство*. Положим $b-a = d$ и $c-b = e$. Тогда $b^2 < (b-d)(b+e) = b^2+(e-d)b-de \Rightarrow (e-d)b-de > 0$, откуда $e-d > 0$.

Пусть a_m — наименьшее число ряда. Очевидно, одно из чисел a_{m-1} и a_{m+1} — не меньше, чем a_m+1, а другое — не меньше, чем a_m+2. Не умаляя общности будем считать, что $a_{m-1} \ge a_m+1$, а $a_{m+1} \ge a_m+2$. Тогда по лемме $a_{m-2} > a_{m-1}+1$, то есть $a_{m-2} \ge a_{m-1}+2$. Аналогично, $a_{m-3} \ge a_{m-2}+3$, …, $a_1 \ge a_2+(m-1)$. Идя в другую сторону, таким же образом получаем $a_{m+2} \ge a_{m+1}+3$, …, $a_k \ge a_{k-1}+(k-m+1)$. Отсюда

$a_1 \ge a_m+1+2+\ldots+(m-1) = a_m+m(m-1)/2$ и $a_k \ge a_m+2+3+\ldots+(k-m+1) = a_m+(k-m)(k-m+3)/2$.

Поскольку разность между любыми двумя числами нашего ряда меньше

1000, из полученных неравенств имеем $m(m–1)/2 < 1000$ и $(k–m)\cdot(k–m+3)/2 < 1000$, откуда $m \le 45$, $k–m \le 43$ и $k \le 88$.

Пример. Пусть $a_{45} = 10000$, $a_i = 10000+1+2+\ldots+(45–i)$ при $1 \le i \le 44$, $a_i = 10000+2+\ldots+(i–44)$ при $46 \le i \le 88$. Нетрудно убедиться, что $a_{45} < a_{44} < a_{46} < a_{43} < a_{47} < \ldots < a_{88} < a_1$, так что все числа a_i различны, и что $a_1 – a_{45} = 1+2+\ldots+44 = 990 < 1000$. Осталось проверить выполнение неравенства (*). Если $i = 44$, неравенство очевидно. Иначе положим $b = a_{i+1}–a_i$. Тогда по построению $a_{i+2} = a_i+2b+1$, и неравенство (*) записывается в виде $(a_i+b)^2 < a_i(a_i+2b+1)$. Раскрыв скобки и приведя подобные члены, получим неравенство $b^2 < a_i$, которое выполнено, так как $b^2 \le 44^2 < 10000 \le a_i$.

4. *В 2n бочках налито 2n различных реактивов (в каждой — один реактив). Они разбиваются на n пар конфликтующих реактивов, но неизвестно, какая бочка конфликтует с какой. Инженеру нужно узнать это разбиение. У него есть n пустых пробирок. За одно действие он может долить в любую пробирку (пустую или непустую) реактив из любой бочки, других действий с реактивами он делать не может. Пока в пробирке нет конфликтующих соединений, в ней ничего не происходит. Как только среди реактивов, содержащихся в ней, появляются конфликтующие, она лопается, и больше её использовать не получится. Выливать из пробирки ничего нельзя. Как инженеру добиться своей цели?* (А. Матвеев, П. Мяктинов)

Решение. Пронумеруем пробирки числами от 1 до n и бочки числами от 1 до $2n$. Назовем *операцией* k ($k \le n$) последовательное наливание в пробирки номер k, номер $k–1$, …, номер 1 (именно в таком порядке) реактива из k-ой бочки. *Операцией* $n+1$ назовем последовательное наливание реактива из $(n+1)$-ой бочки в пробирки с номерами n, $n–1$, …, 1.

Будем последовательно проводить операции 1, 2, …, n, $n+1$ пока какая-то пробирка m не лопнет при операции k (после чего операция k прекращается) Это рано или поздно произойдет, так как среди $n+1$ реактива, которые надо наливать в пробирку 1, обязательно найдутся два конфликтующих. Перед операцией k в пробирке 1 находятся реактивы от 1 до $k–1$, в пробирке 2 – от 2 до $k–1$,…, в пробирке $k–1$ — реактив $k–1$. Поскольку пробирки с номерами от $m+1$ до k не лопнули, реактив k конфликтует именно с реактивом m. Уберем бочки с двумя конфликтующими реактивами, перенумеруем реактивы и бочки в том же порядке, в котором шли их старые номера. Про то, что убранные реактивы находятся в каких-то пробирках, можно забыть, так как они не повлияют на дальнейшие реакции.

Мы убрали два реактива, и сейчас в пробирке 1 находятся реактивы от 1 до $k–2$ (в новой нумерации), в пробирке 2 — от 2 до $k–2$,…, в пробирке $k–2$ — реактив $k–2$. Начинаем проводить операции $k–1$, k,…, пока какая-то пробирка не лопнет (это обязательно произойдет по той же причине, что и выше). Когда пробирка лопается, проделываем то же, что в предыдущем абзаце. Таким образом, потеряв одну пробирку, мы определяем одну пару конфликтующих реактивов. Значит, мы сможем определить все пары конфликтующих реактивов.