

*Первый день.*

1. На доске написаны натуральные числа от 1 до 1000, по одному разу каждое. Вася может стереть любые два числа и записать вместо них одно: их наибольший общий делитель или их наименьшее общее кратное. Через 999 таких операций на доске осталось одно число, равное натуральной степени десятки. Какое наибольшее значение она может принимать?
2. Точка  $N$  — середина стороны  $AD$  выпуклого четырёхугольника  $ABCD$ , а точка  $M$  на стороне  $AB$  такова, что  $CM \perp BD$ . Докажите, что если  $BM > MA$ , то  $2BC + AD > 2CN$ .
3. Среди натуральных чисел  $a_1, \dots, a_k$  нет одинаковых, а разность между наибольшим и наименьшим из них меньше 1000. При каком наибольшем  $k$  может случиться, что все квадратные уравнения  $a_i x^2 + 2a_{i+1} x + a_{i+2} = 0$ , где  $1 \leq i \leq k-2$ , не имеют корней?
4. В  $2n$  бочках налито  $2n$  различных реактивов (в каждой — один реактив). Они разбиваются на  $n$  пар конфликтующих реактивов, но неизвестно, какая бочка конфликтует с какой. Инженеру нужно узнать это разбиение. У него есть  $n$  пустых пробирок. За одно действие он может долить в любую пробирку (пустую или непустую) реактив из любой бочки, других действий с реактивами он делать не может. Пока в пробирке нет конфликтующих соединений, в ней ничего не происходит. Как только среди реактивов, содержащихся в ней, появляются конфликтующие, она лопается, и больше её использовать не получится. Выливать из пробирки ничего нельзя. Как инженеру добиться своей цели?