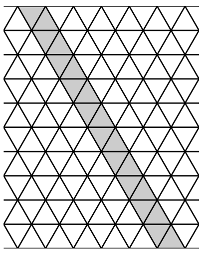
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2024 года ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 6 класс.

---

1. В магазине «Все для кухни» Саша купил кастрюлю, тарелку и пакет, чтобы сложить в него покупку. Он заметил, что стоимость кастрюли выражается трёхзначным числом рублей, не содержащим нулей в десятичной записи. Если из него вычеркнуть одну из цифр, получится стоимость тарелки. А если из стоимости тарелки вычеркнуть одну из цифр, получится стоимость пакета. Мог ли Саша потратить на свою покупку ровно 817 рублей?

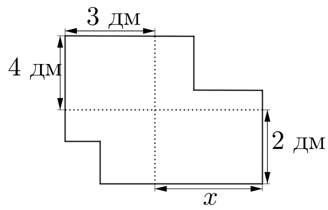
2. В городах А и Б живут оптимисты и пессимисты, при этом все они блондины или брюнеты. Каждый житель поехал утром в другой город на автобусе, а вечером вернулся. Оказалось, что в каждом автобусе, ходившем в тот день из А в Б, количество пессимистов было на треть больше числа блондинов. А в каждом автобусе из Б в А число брюнетов было на одну восьмую больше числа оптимистов. Кого больше среди жителей обоих городов вместе — блондинов или брюнетов — и во сколько раз?



3. На бесконечном листе бумаги в треугольную клеточку можно закрашивать полосы шириной в одну клетку. Такие полосы бывают трех разных направлений. В одном направлении закрасили 5 полос, в другом 6, в третьем — 7. В результате некоторые клетки остались неокрашенными, некоторые покрашены 1 раз, некоторые 2, а некоторые даже 3 раза. Клеток, покрашенных 3 раза, оказалось 34 штуки. Сколько клеток покрашено 2 раза? Не забудьте обосновать ответ.

4. Натуральное число назовём *крупноостаточным*, если сумма остатков, которые оно даёт при делении на 125 и на 80, не меньше 102. Сколько существует крупноостаточных чисел, не превосходящих 1 000 000?

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2024 года ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 7 класс.



1. Дана фигура в виде прямоугольника, из которого вырезано два меньших прямоугольника. Проведена вертикальная прямая, делящая эту фигуру на две части равной площади, и аналогичная горизонтальная прямая. На схеме отмечены длины некоторых отрезков в полученной фигуре. Найдите длину отрезка x. Не забудьте обосновать ответ.

2. В магазине «Всё для ученика» Паша купил портфель, тетрадь, линейку и ручку. Он заметил, что стоимость портфеля выражается четырехзначным числом рублей, не содержащим нулей в десятичной записи. Если из этого числа вычеркнуть одну цифру, получится стоимость тетради. Если из стоимости тетради вычеркнуть одну цифру, будет стоимость линейки. Наконец, если из стоимости линейки вычеркнуть одну цифру, получится стоимость ручки. Могла ли покупка стоить ровно 2323 рубля?

3. На школьный праздник привезли воздушные шарики десяти разных цветов. Учительница расставила по кругу 30 детей и раздала им по три шарика. (Некоторые из десяти цветов могли не попасться ни одному из детей.) Затем она попросила каждого ребенка передать один шарик соседу справа, и указала, какой именно. Если бы все дети выполнили просьбу учительницы, то у каждого из них оказалось бы три шарика разного цвета. Вместо этого каждый ребенок передал один шарик (не обязательно, тот, который было нужно) своему соседу слева. У какого наибольшего числа детей могло оказаться три шарика одного цвета?

4. Саша нашел остатки от деления некоторого числа на 302, 303, 304 и сложил их. Тая нашла остатки от деления того же числа на 100, 101, 102 и сложила их. Могут ли суммы Саши и Таи отличаться на 777?

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2024 года ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 8 класс.

1. В школе №1 посёлка Метёлкино 800 мест, а учится 1450 учеников, а в школе №2 — 900 мест, а учится 1350 учеников. Если бы треть девочек из школы №1 перешла в школу №2, то обе школы оказались бы переполнены на одинаковое число детей. После того, как в Метёлкино построили школу для девочек на 1300 мест, выяснилось, что можно перераспределить детей по школам так, что переполненных школ не будет. Какое наименьшее число девочек могло учиться в школе №2 до постройки новой школы?

2. Для положительных чисел $a \geq b \geq c$ докажите, что

$$3a^2 + 5bc \geq 3b^2 + 5ac.$$

3. Федя изучает некое натуральное число N. Он утверждает, что при любом разбиении числа 4000 в сумму двух различных натуральных слагаемых число N делится ровно на одно из них. Докажите, что он ошибается.

4. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL. На отрезке CL выбрана такая точка E, что $CL \cdot EL = AL^2$. Оказалось, что $BC = CE + AB$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

5. Из белой доски 100×100 вырезали клетки, лежащие на пересечении строк с четными номерами и столбцов с нечетными номерами. За один ход Катя закрашивает две соседние по стороне (невырезанные) клетки доски: одну в красный цвет, а другую — в зеленый. Уже закрашенную ранее клетку разрешается закрашивать снова (в том числе и в другой цвет), но каждую клетку можно закрашивать не более двух раз. Краски непрозрачные: например, клетка, покрашенная красным поверх зеленого, становится красной. Какое наибольшее количество зеленых клеток может оказаться на доске через несколько ходов?

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2024 года ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 9 класс.

---

1. Саша отметил на прямой 200 точек и для каждых двух точек выписал в тетрадку расстояние между ними. Все 19 900 выписанных чисел оказались целыми, и одно из них равно 2023. Саша подчеркнул все числа, не делящиеся на 4. Какое наименьшее количество подчеркнутых чисел могло оказаться в тетрадке?

2. В замке Кащея Бессмертного за круглым столом сидят 100 Василис. Каждая — либо в образе царевны, либо в образе лягушки. Раз в минуту все Василисы *одновременно* превращаются по следующему правилу: если Василиса сидела между двумя лягушками, то следующую минуту она проводит в образе лягушки; в противном случае она будет царевной или лягушкой — по желанию Кащея. Вначале одна Василиса была царевной, а все остальные — лягушками. Какое наибольшее количество царевен за столом может обеспечить Кащей?

3. Назовем натуральное число N *странным*, если выполнено следующее условие:

при любом разбиении числа 20242023 в сумму двух натуральных слагаемых число N делится ровно на одно из этих слагаемых.

Дима выписал по возрастанию первые 200 странных чисел. Найдите отношение двухсотого странного числа к первому.

4. Точка O выбрана внутри, а точка M — вне прямоугольника $ABCD$ так, что отрезок OM пересекает сторону AB. Известно, что $BO = MO$ и $\angle BCO = \angle ODA = \angle MBA$. Кроме того, $\angle BMD = 80°$. Найдите $\angle BDM$.

5. Существует ли возрастающая последовательность натуральных чисел a_1, a_2, a_3, … такая, что при всех m, $n > 1$

$$a_m a_n < a_{mn} < 1{,}001 a_m a_n?$$

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2024 года ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 10 класс.

---

1. Леша отметил на прямой 200 точек так, что расстояние между любыми двумя из них равно целому числу сантиметров. При этом расстояние между самой левой и второй слева точками равно 2023 см., а расстояние между второй и третьей слева точками — 2024 см. Докажите, что найдутся как минимум 397 пар отмеченных точек, расстояния между которыми не делятся на 5.

2. На стороне AC треугольника ABC отмечена такая точка E, что $\angle BEC = \angle ABC$. На продолжении отрезка BE за точку E отмечена такая точка D, что $\angle BCE = \angle CDE$. На отрезке AB отмечена такая точка F, что $BF = CD$. Докажите, что прямая BC касается описанной окружности треугольника AFC.

3. У двух квадратных трёхчленов f и g с положительными старшими коэффициентами равны наименьшие значения. Докажите, что можно подобрать числа a и b так, чтобы выполнялось тождество $g(x) = f(ax+b)$.

4. В лесу расположена 101 полянка. Каждая дорожка в лесу соединяет две полянки (две полянки могут быть соединены максимум одной дорожкой). Назовем две полянки соседними, если они соединены дорожкой. Волк и Заяц играют в игру. Сначала Волк занимает одну из полянок по своему выбору, затем полянку себе выбирает Заяц. После этого игроки ходят по очереди (начинает Волк), каждым ходом игрок должен перебежать на одну из соседних полянок. Каждый игрок знает, где находится соперник. Волк поймает Зайца, если окажется на одной полянке с ним. Оказалось, что Заяц может действовать так, что Волк не сможет его поймать. При каком наибольшем количестве дорожек в лесу это возможно?

5. Четыре попарно различных натуральных числа a, b, c и d в сумме дают 20 000. Найдите наименьшее возможное значение НОК(a, b, c, d).

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2024 года ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 11 класс.

---

1. В каждой клетке таблицы 1800×3 (1800 строк, 3 столбца) стоит одна из букв О, Р или Т. В каждой строке все буквы различны, и в каждом столбце ровно по 600 букв О, Р и Т. Докажите, что строк, в которых записано (слева направо) слово ОРТ, столько же, сколько строк, в которых записано (слева направо) слово ТОР.

2. В тетраэдре $ABCD$ углы BAD и BCD прямые. В плоскости ABC через точку B проведена касательная к описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что она перпендикулярна прямой BD.

3. Из белой доски 100×100 вырезали клетки, лежащие на пересечении строк с чётными номерами и столбцов с нечётными номерами. За один ход Катя закрашивает две соседние по стороне (невырезанные) клетки доски: одну в красный цвет, а другую — в зелёный. Уже закрашенную ранее клетку разрешается закрашивать снова (в том числе и в другой цвет), но каждую клетку можно закрашивать не более двух раз. Краски непрозрачные: например, клетка, покрашенная красным поверх зелёного становится красной. Какое наибольшее количество зелёных клеток может оказаться на доске через несколько ходов?

4. Какое число больше: $\sqrt[97]{2} + \sqrt[102]{2} + \sqrt[100]{2^{99}}$ или 4?

5. Андрей записал в тетрадку натуральные числа n, n^2, n^3 и n^4. Оказалось, что в их записи цифры 4, 5, 6, 7, 8, 9 использовались поровну раз, и цифры 0, 1, 2, 3 поровну раз, причем цифра 0 — на один раз больше, чем цифра 4. На какую цифру начинается число n?