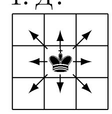
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2025 года ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 6 класс.

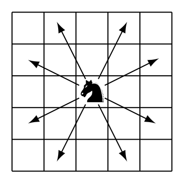
1. Ковбой, выйдя из салуна, движется вдоль прямой с постоянной скоростью. Одну минуту он идет вперед, затем две минуты назад, потом три минуты вперед и т. д. В некотором месте на прямой стоит фонарный столб. Между первой и второй встречей ковбоя со столбом прошла одна минута. Сколько времени прошло между 2025-й и 2026-й встречей?

2. В очереди на медосмотр стоят 100 пациентов со справками. Раз в минуту врач подходит к какому-то из пациентов и говорит ему: «У вас мало справок!» От этого пациент огорчается и идёт в конец очереди, попутно раздавая по одной справке всем, кто стоял позади него. Если же у пациента не хватает справок, чтобы это сделать, медосмотр отменяется для всех. Сегодня врач сумел отменить медосмотр за 19 минут. Докажите, что он мог бы отменить медосмотр и за одну минуту. (Врач всегда знает, сколько справок имеется у каждого пациента, и сам выбирает, к кому подходить.)

3. Клетчатый квадрат 23×23 разрезали по клеточкам на прямоугольники и пронумеровали их. Могло ли так оказаться, что площадь первого прямоугольника равна 1 или 2, площадь второго — 2 или 3, площадь третьего — 3 или 4 и т. д?

4. Шахматные фигуры «конь» и «король» умеют делать ходы восьми разных видов (см. рисунки). Сергей изобрел новую фигуру «кузнечик», которая умеет делать ходы k разных видов. Поставив кузнечика на одну из клеток доски 100×100, Сергей последовательно сделал им 10 000 ходов, обойдя кузнечиком все клетки доски по одному разу и в результате вернувшись в исходную клетку. При каком наименьшем k такое могло произойти?





. . . .

Олимпиада 2025 года. II тур. 6 класс. Выводная аудитория.

5. Шестизначное число поделили с остатком на все натуральные числа от 1000 до 2000. Докажите, что хотя бы один из остатков оказался нечётным.

6. На окружности выделено $100k$ дуг, не имеющих общих концов. Дуги раскрашены в k цветов: 100 дуг покрашены в первый цвет, 100 дуг во второй и т. д., 100 дуг — в k-й цвет. При этом каждая точка окружности покрашена не более чем в два цвета, но для каждой пары цветов какая-то точка окружности покрашена именно в эти два цвета. Найдите наибольшее возможное значение k.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2025 года ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 7 класс.

1. Верно ли, что в любом 120-значном числе без нулей можно так переставить цифры, что полученное число будет делиться на 13?

2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ равны стороны AB, BC и CD. Докажите, что если $\angle C = 2\angle A$, то $\angle B = 2\angle D$.

3. На доске написаны числа 101, 102, ..., 200. За одну операцию можно совершить одно из трех действий:

1) увеличить на 1 наименьшее число (любое одно из наименьших, если их несколько) и уменьшить на 1 наибольшее (тоже любое);

2) стереть с доски одно наибольшее и одно наименьшее числа (тоже по одному, если какое-то из них встречается несколько раз);

3) умножить все числа на доске на 3.

Можно ли за несколько операций сделать все числа на доске равными (разумеется, не стирая их все)?

4. На доске 2025×2025 стоит несколько фигур «косоглазая полуладья». Каждая из них бьет одну линию (столбец или строку), но не ту, на которой стоит, а соседнюю. Ни одна из стоящих фигур не бьёт никакую другую. Какое наибольшее количество фигур может стоять на доске?

. . . .

Олимпиада 2025 года. II тур. 7 класс. Выводная аудитория.

5. В марсианской школе учатся красные, синие и зелёные марсиане, причём красных марсиан не меньше 80. Каждый день три разноцветных марсианина назначаются дежурными по школе. Через некоторое время оказалось, что 20 % учеников побывали на дежурстве по 2 раза, 30 % — по 3 раза, а остальные — по 5 раз. Всех красных марсиан, побывавших на дежурстве 5 раз, наградили кактусом. Докажите, что в школе осталось не менее 70 марсиан без кактуса, побывавших на дежурстве по 5 раз.

6. На доске записаны три числа: 2025^{2025}, 2026^{2026}, 2027^{2027}. Петя и Вася играют в игру. За ход разрешается заменить наименьшее число A на доске на два таких натуральных числа B и C, что B и C не взаимно просты и $B + C = A$ (если наименьших чисел несколько, можно взять любое из них). После замены все простые числа с доски стираются. Проигрывает тот, кто не может сделать ход, первым ходит Петя. Кто выигрывает при правильной игре?

7. В треугольнике ABC на стороне AB выбрана точка M, на стороне BC точка N, на стороне AC точки K и L. При этом $AM = KL = CN$, $BM = AK$, $BN = CL$. Докажите, что сумма периметров треугольников BMN и BKL больше периметра ABC.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2025 года ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 8 класс.

1. Площадь выпуклого четырехугольника $ABCD$ равна 2. На его стороне AB нашлась такая точка E, что площадь треугольника CDE равна 1. Докажите, что на стороне CD найдётся такая точка F, что площадь треугольника ABF равна 1.

2. По кругу стоят несколько (не меньше трёх) ненулевых чисел. Может ли оказаться, что для каждых трёх подряд идущих по часовой стрелке чисел a, b, c выполняется равенство $c = a + \frac{1}{b}$?

3. В городе живёт 100 котов и m псов и действует много клубов для животных. Каждый кот и каждый пёс *предпочитает* ровно 100 клубов. При каком наибольшем m они заведомо могут пойти каждый в один из предпочитаемых клубов так, чтобы ни в одном из клубов не встретились кот и пёс?

4. Александр, будучи ценителем творчества Леонарда Эйлера (1707–1783), взял шестизначное число и поделил его с остатком на все числа от 1707 до 1783. Докажите, что хотя бы один из остатков делится на 3.

. . . .

Олимпиада 2025 года. II тур. 8 класс. Выводная аудитория.

5. Дано простое число p. Некоторые натуральные числа покрашены в синий цвет. Лягушка прыгает по целым точкам числовой прямой вправо, длина каждого её прыжка — натуральное число. Она хочет попасть из точки -1 в точку p. Первые два прыжка могут иметь любую натуральную длину, но после второго прыжка лягушка должна оказаться в точке с синей координатой. После этого все прыжки, начиная с третьего, должны иметь синюю длину. Докажите, что количество возможных маршрутов лягушки кратно p.

6. На стороне AC треугольника ABC нашлись точки P, Q такие, что $AQ = AB$, $CP = CB$. Точка K на стороне AB такова, что $BK = AP$, точка L на стороне CB такова, что $BL = CQ$. Докажите, что периметр треугольника ABC меньше суммы периметров треугольников BKL и BPQ.

7. Даны натуральные числа m и n. Федя пишет в каждой клетке таблицы $m \times n$ вещественное число. После этого Серёжа, дав Феде одну конфету, может выбрать одну линию (строку или столбец) и попросить Федю умножить на -1 все числа в этой линии. Серёжа стремится к тому, чтобы в каждой из $m + n$ линий сумма чисел стала неотрицательной. Федя, зная об этом, составил исходную таблицу так, чтобы получить побольше конфет. Сколько конфет сможет гарантированно получить Федя?