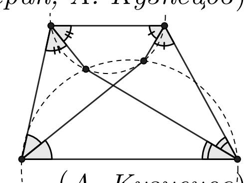
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2022 года ПО МАТЕМАТИКЕ

II тур. 9 класс.

1. Натуральные числа a и b таковы, что $a+k$ делится на $b+k$ при всех натуральных $k<b$. Докажите, что $a-k$ делится на $b-k$ при всех натуральных $k<b$.
(*А. Кузнецов, Т. Коротченко*)

2. В кружке патриотической песни занимается 12 школьников, каждый из них знает несколько песен (возможно, ни одной). Будем говорить, что группа школьников может спеть песню, если ее знает хотя бы один член группы. Руководитель кружка заметил, что любая группа из 10 кружковцев может спеть ровно 20 песен, а любая группа из 8 кружковцев — ровно 16 песен. Докажите, что группа из всех 12 кружковцев может спеть ровно 24 песни. (*В. Мигрин, А. Кузнецов*)

3. Докажите, что точки пересечения биссектрис противоположных углов трапеции вместе с концами любого из её оснований лежат на одной окружности. Для определенности будем считать, что точки расположены так, как показано на рисунке.



(*А. Кузнецов*)

4. Будем говорить, что точка плоскости (u,v) лежит *между* параболами $y=f(x)$ и $y=g(x)$, если $f(u)\leqslant v\leqslant g(u)$. Найдите наименьшее вещественное p, при котором выполнено следующее утверждение: любой отрезок, концы и середина которого лежат между параболами $y=x^2$ и $y=x^2+1$, целиком лежит между параболами $y=x^2$ и $y=x^2+p$. (*И. Туркин*)

. . . .

Олимпиада 2022 года. II тур. 9 класс. Выводная аудитория.

5. Есть две кучки камней: 1703 камня в одной кучке и 2022 в другой. Саша и Оля играют в игру, делая ходы по очереди, начинает Саша. Пусть перед ходом игрока кучи содержат a и b камней, причем $a\geqslant b$. Тогда своим ходом игроку разрешается взять из кучи с a камнями любое количество камней от 1 до b. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре? (*А. Голованов*)

6. В треугольнике ABC проведена медиана BM. На касательной в точке C к описанной окружности треугольника BMC отмечена точка D так, что $\angle CBD=90^\circ$. Отрезки AD и BM пересекаются в точке E. Докажите, что центр описанной окружности треугольника BDE лежит на прямой AC. (*А. Кузнецов*)

7. Даны n различных натуральных чисел, любые два из них получаются друг из друга перестановкой цифр (ноль на первое место ставить нельзя). При каком наибольшем n все эти числа могут делиться на наименьшее из них?
(*Т. Коротченко*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2022 года ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 10 класс.

---

1. Можно ли на параболе $y = x^2$ отметить точки A, B, C, D, а на параболе $y = 2x^2$ — точки E, F, G, H так, чтобы выпуклые четырехугольники $ABCD$ и $EFGH$ оказались равными?

2. Будем говорить, что набор вещественных чисел $A = (a_1, \ldots, a_{17})$ *сильнее* набора вещественных чисел $B = (b_1, \ldots, b_{17})$, и писать $A \gg B$, если среди всех неравенств $a_i > b_j$ количество верных неравенств не менее чем в 3 раза превосходит количество неверных. Докажите, что не существует цепочки наборов A_1, A_2, $\ldots$, A_N таких, что

$$A_1 \gg A_2 \gg \ldots \gg A_N \gg A_1.$$

(*Д. Фомин*)

3. В остроугольном треугольнике ABC провели высоту AH и диаметр AD описанной окружности. Точка I — центр вписанной окружности. Докажите, что $\angle BIH = \angle DIC$. (*Ф. Бахарев*)

4. Есть две кучки камней: 444 камня в одной кучке и 999 в другой. Саша и Федя играют в игру, делая ходы по очереди, начинает Саша. Пусть перед ходом игрока кучи содержат a и b камней, причем $a \geqslant b$. Тогда своим ходом игроку разрешается взять из кучи с a камнями любое количество камней от 1 до b. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре? (*А. Голованов*)

. . . .

Олимпиада 2022 года. II тур. 10 класс. Выводная аудитория.

5. Пусть $n > 2$ — натуральное число, $1 = a_1 < \ldots < a_k = n - 1$ — все числа от 1 до n, взаимно простые с n. Обозначим через $f(n)$ наибольший общий делитель чисел $a_1^3 - 1$, $\ldots$, $a_k^3 - 1$. Какие значения может принимать функция $f(n)$? (*Ф. Петров*)

6. В треугольнике ABC проведена медиана BM. На касательной в точке C к описанной окружности треугольника BMC отмечена точка D так, что $\angle CBD = 90°$. Отрезки AD и BM пересекаются в точке E. Докажите, что центр описанной окружности треугольника BDE лежит на прямой AC.

7. Питерский бизнес-клуб «Эльдорадо» был основан много лет назад знаменитым миллионером Пафнутием Копейко, который в начале был его единственным членом. Потом клуб только расширялся, но по правилам каждый новый эльдорадовец должен быть личным другом ровно одного из старых членов клуба. Бизнесмена называют *неудачником*, если его состояние не превосходит среднего арифметического состояний всех его друзей в клубе, увеличенного на 1 биткоин. Сегодня оказалось, что в клубе $n + 1$ членов, все они неудачники, а сам Пафнутий вообще полностью разорен. Докажите, что состояние любого члена клуба не превосходит n^2 биткоинов. (*Д. Фомин*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2022 года ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 11 класс.

---

1. Можно ли на параболе $y = x^2$ отметить точки A, B, C, D, а на параболе $y = 2x^2$ — точки E, F, G, H так, чтобы выпуклые четырехугольники $ABCD$ и $EFGH$ оказались равными?

2. В остроугольном треугольнике ABC с углом 45° при вершине A проведены высоты AD, BE и CF. Луч EF пересекает прямую BC в точке X. Оказалось, что $AX \parallel DE$. Найдите углы треугольника ABC.

3. Иван и Кащей играют в следующую игру. Изначально на доске записан многочлен $x - 1$. За один ход можно заменить многочлен $f(x)$, записанный на доске, на многочлен $ax^{n+1} - f(-x) - 2$, где n — степень многочлена $f(x)$, а a — один из его вещественных корней. Игроки ходят по очереди, начинает Иван. Выигрывает тот игрок, после хода которого на доске будет написан многочлен, не имеющий вещественных корней. Сможет ли Иван победить Кащея?

4. Будем говорить, что набор чисел $a_1, \ldots, a_m$ *сильнее* набора чисел $b_1, \ldots, b_n$, если среди всех неравенств вида $a_i > b_j$ количество верных неравенств не менее чем в 2 раза превосходит количество неверных. Докажите, что не существует трех наборов A, B и C, таких что A сильнее B, B сильнее C, C сильнее A.

. . . .

Олимпиада 2022 года. II тур. 11 класс. Выводная аудитория.

5. Высоты AA_1, BB_1, CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. На касательную, проведенную из точки C к описанной окружности треугольника AB_1C_1, опущен перпендикуляр HQ (точка Q лежит внутри треугольника ABC). Докажите, что окружность, проходящая через точку B_1 и касающаяся прямой AB в точке A, касается также и прямой A_1Q. (*С. Берлов*)

6. Найдите все пары ненулевых (не обязательно положительных) рациональных чисел x, y, обладающие следующим свойством: любое положительное рациональное число можно представить в виде $\{rx\}/\{ry\}$ с положительным рациональным r.

(*А. Голованов*)

7. Есть $2n$ карточек, на каждой написано число от 1 до n (каждое — ровно на двух карточках). Карточки лежат на столе числами вниз. Набор из n карточек называется хорошим, если на них каждое число встречается по одному разу. Барон Мюнхгаузен утверждает, что он может указать 80 наборов по n карточек, из которых хотя бы один заведомо окажется хорошим. При каком наибольшем n слова барона могут быть правдой?