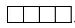
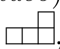
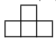
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2021 года ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 6 класс.

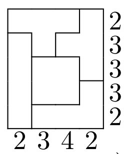
---

1. Город имеет форму клетчатой фигуры: линии — улицы, клеточки — жилые кварталы. Костя и Оля вышли с перекрестка *А* в одном и том же направлении и далее каждый из них на каждом перекрестке либо поворачивал (налево или направо), либо шел прямо. Костя сделал 7 поворотов налево, 8 направо и 9 раз прошел прямо. Оля сделала 9 поворотов направо, 8 налево, а на 7 перекрестках прошла прямо. Могли ли они оба прийти в результате на один и тот же перекресток *Б*?

(*К. Кохась*)

2. В неком монастыре каждый монах — либо исповедник, либо инквизитор. При разговоре с исповедником каждый человек говорит правду, а при разговоре с инквизитором — лжет. Ровно одного из монахов зовут Фуфелий. Однажды монах *А* сказал монаху *Б*: «Оказывается, Фуфелий — исповедник». Потом монах *Б* сказал монаху *Ц*: «А Фуфелий-то — инквизитор». Наконец, вскоре монах *Ц* сказал монаху *А*: «Фуфелий — это я!!» Может ли монах *А* быть исповедником? (*К. Кохась*)

3. Квадрат 100×100 разрезан на фигурки вида , ,  или  (фигурки могут быть повернуты и перевернуты). Для каждого ряда клеток (вертикального или горизонтального) написали, клетки скольких фигурок он содержит. Сумма этих двухсот чисел оказалась равна 12 000. Сколько среди фигурок квадратиков? Не забудьте обосновать ответ. (Для примера на рисунке показаны подписи к рядам для прямоугольника 5×4.)



(*А. Солынин*)

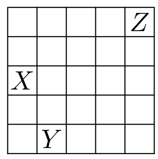
4. У натуральных чисел a и $a+1$ взяли по делителю. Сумма делителей оказалась равна 2036. Какое наименьшее значение могло иметь число a? (*А. Голованов*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2021 года ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 7 класс.

---

1. В ларьке у дома перчатки стоят вдвое дороже маски. В магазине у метро маска стоит втрое дороже, чем перчатки. Каждый день с 1 по 30 сентября Саша покупал комплект из маски и перчаток либо в магазине, либо в ларьке. Оказалось, что за это время он потратил поровну денег на маски и на перчатки, а также одинаковое число раз покупал их в магазине и в ларьке. Где комплект из маски и перчаток стоит дороже и во сколько раз? (*А. Кузнецов*)

2. Андрей испачкал некоторые клетки доски 5×5. Клетки X, Y и Z (см. рисунок) остались чистыми. Ладья-чистюля за один ход может переместиться с чистой клетки на любую другую чистую клетку в той же вертикали или горизонтали (при этом клетки, над которыми она проходит, могут быть испачканными). Оказалось, что наименьшее количество ходов в маршруте ладьи-чистюли от клетки X до клетки Y равно двум, от клетки Y до клетки Z — шести, а от клетки Z до клетки X — семи. Приведите пример, какие клетки могли быть испачканы. Не забудьте обосновать, что этот пример подходит. (*А. Солынин*)



3. На доске написано пятизначное число A. Если зачеркнуть в нем первую и вторую цифру, получится трехзначное число B, а если зачеркнуть первую, вторую и третью, получится двузначное число C (числа A, B и C не начинаются с нуля). Оля вычислила значение выражения $75 \cdot A - 86 \cdot B \cdot C$. Могла ли она в результате получить 0? (*А. Кузнецов*)

4. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка D, на отрезке AD выбрана точка E, а на отрезке BD — точка F, причем $AE = 1$, $BF = DE = 2$ и $CD = 3$. Оказалось, что $AB = CE$. Найдите длину отрезка AF. (*А. Кузнецов*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2021 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 8 класс.

---

1. В Солнечном Городе прошли выборы главного инженера. Каждый из 20 000 жителей проголосовал за одного из пяти кандидатов либо на участке, либо на дому. Сначала подсчитали все голоса на участке. Оказалось, что кандидат Клёпка набрал меньше голосов, чем любой из его конкурентов. Но после этого стали известны результаты голосования на дому, и оказалось, что Клёпка набрал более 50 % всех голосов! Докажите, что на дому проголосовало более 7500 жителей.

2. Пусть a, b, c — различные положительные числа. Три прямые

$$y = ax + b^3, \quad y = bx + c^3 \quad \text{и} \quad y = cx + a^3$$

на координатной плоскости образовали в пересечении треугольник. Докажите, что этот треугольник пересекает ось ординат.

3. У фермера есть 35 свиней и мешок с 26 кг корма. Докажите, что он может покормить свиней так, чтобы любые две свиньи вместе весили целое число килограммов. (Весь корм использовать не обязательно.)

(*О. Иванова*)

4. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка D, на отрезке AD выбрана точка E, а на отрезке BD — точка F, причем $AE = 1$, $BF = DE = 2$ и $CD = 3$. Оказалось, что $AB = CE$. Найдите длину отрезка AF.

5. В соцсети “Всмысле?” пароль каждого участника состоит из букв *а*, *б*, *в*, …, *я* (33 буквы) и нескольких допустимых спецсимволов. При этом пароль должен содержать хотя бы пять различных букв и хотя бы три различных спецсимвола. Пароли называются похожими, если в них содержатся хотя бы две различных общих буквы и хотя бы два различных общих спецсимвола (не обязательно на одних и тех же местах). Соцсеть не даёт возможности зарегистрировать аккаунт с паролем, если на него похожи хотя бы 11 паролей уже зарегистрированных участников. Тем не менее 600 аккаунтов уже зарегистрировано. Докажите, что допустимых спецсимволов не менее 5.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2021 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 9 класс.

---

1. Трое велосипедистов стартовали одновременно из одной точки круговой трассы в одном направлении и финишировали одновременно в той же точке. При этом первый обгонял третьего 8 раз, а второй обгонял третьего 2 раза. (Скорости велосипедистов постоянны; встречи в моменты старта и финиша обгонами не считаются.) Скорость первого равна 30 км/ч, скорость второго равна 20 км/ч. Найдите скорость третьего велосипедиста.

2. Биссектриса угла B треугольника ABC пересекает его описанную окружность в точке D. На стороне BC отмечена такая точка E, что $\angle ADC = \angle AEC$. Докажите, что $DC + DE > AB$. (*А. Пастор*)

3. Каждая клетка доски 100×100 окрашена в один из 20 цветов. Клетка называется *удивительной*, если ни в её вертикали, ни в её горизонтали нет других клеток того же цвета. Какое наибольшее количество удивительных клеток может быть на доске? (*С. Берлов*)

4. Даны два квадратных трехчлена $f(x)$ и $g(x)$. Известно, что уравнение

$$f(x) = g(|x|)$$

имеет ровно четыре различных корня. Сколько корней имеет уравнение $f(|x|) = g(x)$? (*А. Храбров*)

5. У фермера есть 44 мешка с кормом и одна свинья. Каждый мешок содержит больше 1 кг корма. Докажите, что фермер может дать свинье не более чем 29 кг корма из этих мешков так, чтобы после этого любые три мешка вместе весили целое число килограммов. (*О. Иванова*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2021 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ

I тур. 10 класс.

1. Сто математиков, 25 из которых — геометры, проверяли глазомер. На доске был нарисован треугольник, и каждый из математиков написал предположительные значения трёх его углов (дающие в сумме 180°). Ответы, отличающиеся порядком перечисления углов (например, «30°, 30°, 120°» и «30°, 120°, 30°») считаются одинаковыми. Среди 300 углов, предложенных математиками, 12 углов были равны 52°, 47 углов — 58°, 29 углов — 59°, 101 угол — 60°, 75 углов — 61°, 36 углов — 64°. Все геометры ответили верно. Чему равнялись углы треугольника?

2. Даны квадратные трехчлены $f(x)$ и $g(x)$. Известно, что уравнение

$$f(x) = g(|x|)$$

имеет ровно 4 различных вещественных корня. Сколько различных вещественных корней имеет уравнение $f(|x|) = g(x)$? (*А. Храбров*)

3. На стороне BC выпуклого четырехугольника $ABCD$ отмечена точка P. Оказалось, что описанные окружности треугольников PAB и PCD касаются прямой AD. При этом $\angle BAP = \angle PDC = 30°$. Найдите угол APD.

4. Найдите все такие натуральные числа $n > 1$, что если к любому натуральному делителю n, отличному от n, прибавить 2, то полученное число будет иметь с n общий делитель, больший 1. (*С. Берлов*)

5. В школе действует несколько кружков. Среди них есть кружок по топологии, который никто не посещает, и кружок по обществознанию, на который ходят все 2020 учеников школы. Списочные составы любых двух кружков различны. Кроме того, для любых двух кружков A и B

1) найдётся кружок C, который посещают в точности те ученики, которые посещают как A, так и B;

2) найдётся кружок D, который посещают в точности те ученики, которые посещают хотя бы один из кружков A или B.

Докажите, что какой-то ученик посещает не менее половины всех кружков.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2021 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 11 класс.

---

1. Трое велосипедистов стартовали одновременно из точки A круговой трассы в одном направлении и финишировали одновременно в точке B. При этом первый обгонял третьего 8 раз, а второй обгонял третьего 2 раза. (Скорости велосипедистов постоянны; встречи в моменты старта и финиша обгонами не считаются.) Скорость первого равна 27 км/ч, скорость второго равна 19 км/ч. Найдите скорость третьего велосипедиста.

2. Сечение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (не обязательно прямоугольного) плоскостью представляет из себя пятиугольник с вершинами на рёбрах AA_1, BB_1, CC_1, CD и DA. Его стороны в порядке обхода, начиная с одной из вершин, равны 2, 3, 4, 5, 7. Найдите угол между сторонами длины 5 и 7.

3. Даны многочлены третьей степени $f(x)$ и $g(x)$. Известно, что уравнение

$$f(x) = g(|x|)$$

имеет ровно 6 различных вещественных корней. Сколько различных вещественных корней имеет уравнение $f(|x|) = g(x)$?

4. Существуют ли такие различные простые числа p и q, большие 1000, и такое натуральное число N, что в разложение числа $N! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot N$ на простые множители p входит в степени $200q + 199$, а q входит в степени $200p + 199$?

5. В школе действует несколько кружков. Среди них есть кружок по топологии, который никто не посещает, и кружок по обществознанию, на который ходят все 2020 учеников школы. Списочные составы любых двух кружков различны. Кроме того, для любых двух кружков A и B

1) найдётся кружок C, который посещают в точности те ученики, которые посещают как A, так и B;

2) найдётся кружок D, который посещают в точности те ученики, которые посещают хотя бы один из кружков A или B.

Докажите, что какой-то ученик посещает не менее половины всех кружков.