САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

РАЙОННЫЙ ЭТАП
ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

16 ноября 2019 г. I тур 9 класс 1 вариант

1. Уравнение $x^2+ax+b=0$ имеет два корня. Числа, обратные к его корням, являются корнями уравнения $x^2+(6a+1)x+(6b+1)=0$. Найдите a и b.

2. В лагерь должны были приехать школьники. Вожатые вычислили, что их можно расселить во все имеющиеся комнаты ровно по 4 человека в комнату. Но в лагерь приехало на 70 школьников больше, чем ожидалось, и вожатые стали селить по 5 человек в комнату. Когда ровно в треть всех комнат поселили по 5 человек, вожатые поняли, что комнат не хватит и в оставшиеся комнаты они стали заселять по 6 человек. В результате все школьники поместились (последняя занятая комната могла оказаться заполненной не до конца), и ровно одна комната оказалась совсем пустой. Сколько школьников приехало в лагерь?

3. На стороне AB треугольника ABC с углом C, равным $108°$, выбраны точки P и Q (P между A и Q) таким образом, что периметр треугольника CPQ равен длине стороны AB. Оказалось, что центр описанной окружности остроугольного треугольника ACQ лежит на описанной окружности треугольника PCQ. Найдите $\angle PCQ$.

4. Антон положил на клетчатую доску 46×101 несколько бумажных крестиков, изображенных на рисунке (каждый крестик покрывает ровно 5 клеток доски). Оказалось, что для каждой клетки доски сумма попавших на неё чисел не превосходит 2. Какое наибольшее количество крестиков мог положить Антон?

	1	
1	2	1
	1	

5. Дано натуральное число $n>100$. Число

$$(0+1+2+\ldots+n^2)^{n^2}$$

представляет собой произведение n^2 одинаковых сомножителей, каждый из которых равен $0+1+2+\ldots+n^2$. Докажите что можно в каждом сомножителе вычеркнуть одно слагаемое так, чтобы результат делился на произведение всех натуральных чисел от 1 до n^2+n.

Этот листок Вы можете оставить себе на память. В начале своей работы укажите следующие данные:

Фамилия, имя; телефон; класс, школа, район школы;
ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние.
Списки прошедших на городской и региональный тур будут опубликованы на сайтах www.pdmi.ras.ru/~olymp и http://anichkov.ru/page/olimp/

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

РАЙОННЫЙ ЭТАП
ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

16 ноября 2019 г. I тур 9 класс 2 вариант

1. Уравнение $x^2+cx+d=0$ имеет два корня. Числа, обратные к его корням, являются корнями уравнения $x^2+(8c+2)x+(8d+2)=0$. Найдите c и d.

2. В ресторане был запланирован банкет. Организаторы вычислили, что всех гостей можно рассадить за все имеющиеся в ресторане столы ровно по 5 человек за стол. Но на банкет пришло на 80 человек больше, чем ожидалось, и организаторы стали сажать по 6 человек за стол. Когда ровно за четверть всех столов посадили по 6 человек, организаторы поняли, что столов не хватит, и за оставшиеся столы они стали сажать по 7 человек. В результате все поместились (за последним занятым столом могло оказаться меньше 7 человек), причем ровно один стол оказался совсем пустым. Сколько гостей пришло на банкет?

3. В треугольнике ABC угол C равен $46°$. На продолжении стороны AB за точку A выбрана точка X, а на продолжении AB за точку B — точка Y так, что длина отрезка XY равна периметру треугольника ABC. Оказалось, что центр описанной окружности остроугольного треугольника ACY лежит на описанной окружности треугольника ABC. Найдите $\angle XCY$.

4. Дима положил на клетчатую доску 90×35 несколько бумажных крестиков, изображенных на рисунке (каждый крестик покрывает ровно 5 клеток доски). Оказалось, что для каждой клетки доски сумма попавших на неё чисел не превосходит 2. Какое наибольшее количество крестиков мог положить Дима?

	1	
1	2	1
	1	

5. Дано натуральное число $m>100$. Число

$$\Bigl(0+1+2+\ldots+m^2+(m^2+1)\Bigr)^{m^2+1},$$

представляет собой произведение m^2+1 одинаковых сомножителей, каждый из которых равен $0+1+2+\ldots+m^2+(m^2+1)$. Докажите что можно вычеркнуть в каждом сомножителе одно слагаемое так, чтобы результат стал делиться на произведение всех натуральных чисел от 1 до m^2+m+1.

Этот листок Вы можете оставить себе на память. В начале своей работы укажите следующие данные:

Фамилия, имя; телефон; класс, школа, район школы;
ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние.
Списки прошедших на городской и региональный тур будут опубликованы на сайтах www.pdmi.ras.ru/~olymp и http://anichkov.ru/page/olimp/