САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2020 года ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 9 класс.

---

1. Какое наибольшее количество решений может иметь уравнение

$$\max\{a_1x + b_1, \ldots, a_{10}x + b_{10}\} = 0,$$

если $a_1, \ldots, a_{10}, b_1, \ldots, b_{10}$ — вещественные числа, причем все a_i не равны 0?

2. Назовем тройку натуральных чисел a, b, c *вызывающей интерес*, если $(a^2+1)(b^2+1)$ кратно c^2+1, но ни один из двух множителей сам не кратен c^2+1.

Дана вызывающая интерес тройка a, b, c. Докажите, что существуют натуральные числа u, v, для которых тройка u, v, c вызывает интерес и $uv < c^3$.

3. На стороне AD выпуклого четырехугольника $ABCD$ с острым углом B отмечена точка E. Известно, что $\angle CAD = \angle ADC = \angle ABE = \angle DBE$. Докажите, что $BE + CE < AD$.

4. В таблице 25 столбцов и 300 строк, Костя покрасил все ее клетки в три цвета. Затем Леша, глядя на таблицу, для каждой строки называет один из трех цветов и отмечает в этой строке все клетки этого цвета. (Если в строке нет клеток указанного цвета, то он ничего в ней не отмечает.) После этого из таблицы вычеркивают все столбцы, которые содержат хотя бы одну отмеченную клетку. Костя хочет, чтобы в таблице осталось как можно меньше столбцов, а Леша хочет, чтобы как можно больше. Какое наибольшее число столбцов может гарантированно оставить Леша?

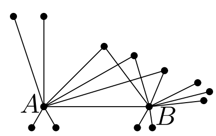
. . . .

Олимпиада 2020 года. II тур. 9 класс. Выводная аудитория.

5. Точка I_a — центр вневписанной окружности треугольника ABC, касающейся стороны BC в точке X, а точка A' диаметрально противоположна точке A на описанной окружности этого треугольника. На отрезках I_AX, BA', CA' выбраны точки Y, Z, T соответственно таким образом, что $I_AY = BZ = CT = r$, где r — радиус вписанной окружности треугольника ABC. Докажите, что точки X, Y, Z, T лежат на одной окружности.

6. На координатной плоскости отмечены точки: (1,1), (2,3), (4,5), (999,111). Если отмечена точка (a, b), то можно отметить также точки (b, a) и $(a - b, a + b)$; если отмечены точки (a, b) и (c, d), то можно отметить точку $(ad + bc, 4ac - 4bd)$. Удастся ли рано или поздно отметить точку на прямой $y = 2x$?

7. В графе 400 вершин. Для любого ребра AB назовём *каракатицей* набор *всех* ребер, выходящих из вершин A и B (включая само ребро AB). На каждом ребре графа стоит число 1 или -1. Известно, что сумма чисел на ребрах любой каракатицы больше или равна 1. Докажите, что сумма чисел на всех ребрах графа не меньше чем -10000.



САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2020 года ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 10 класс.

---

1. У Андрюши есть 100 камней разного веса, причем он различает камни по внешнему виду, но не знает, сколько именно весит каждый камень и как они упорядочены по весу. Андрюша может вечером положить на стол ровно 10 камней, а ночью домовой разложит их по возрастанию веса. Но если в доме живёт ещё и барабашка, то под утро он обязательно поменяет какие-то два из разложенных камней местами. Всё это известно Андрюше, но он не знает, есть ли в доме барабашка. Сможет ли он это узнать?

2. Найдите все натуральные числа, такие что сумма квадратов их пяти наименьших делителей — точный квадрат.

3. На основании AD трапеции $ABCD$ отмечена точка E. Известно, что $\angle CAD = \angle ADC = \angle ABE = \angle DBE$. Докажите, что треугольник BCE — равнобедренный.

4. Дано натуральное число m. Докажите, что при некотором натуральном k имеет место неравенство

$$1 \leq \frac{1^m + 2^m + 3^m + \ldots + (k-1)^m}{k^m} < 2.$$

. . . .

Олимпиада 2020 года. II тур. 10 класс. Выводная аудитория.

5. Из точки O выходят лучи ℓ, ℓ_1, ℓ_2, угол между ℓ и ℓ_2 острый, луч ℓ_1 лежит внутри этого угла. На луче ℓ лежит фиксированная точка F и произвольная точка L. Через точки F и L проходят окружность, касающаяся луча ℓ_1 в точке L_1, и окружность, касающаяся луча ℓ_2 в точке L_2. Докажите, что окружность FL_1L_2 проходит через некоторую точку, отличную от точки F и не зависящую от выбора точки L.

6. В социальной сети у каждого пользователя не более десяти друзей (отношение «дружба» симметрично). Сеть *связна*: если, узнав интересную новость, пользователь начинает рассылать её своим друзьям, те своим и так далее, то в итоге новость узнают все пользователи. Докажите, что администрация сети может разбить пользователей на группы так, чтобы выполнялись следующие условия:

(i) каждый состоит ровно в одной группе;

(ii) каждая группа связна в указанном выше смысле;

(iii) одна из групп содержит от 1 до 100 членов, а каждая из остальных от 100 до 900 членов.

7. В экзамене 25 тем, по каждой из которых заготовлено 8 вопросов. В билет входят 4 вопроса по разным темам. Можно ли заготовить 50 билетов так, чтобы каждый вопрос встречался в них ровно один раз и для любых двух тем был билет, в котором есть вопросы по ним обеим?

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2020 года ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 11 класс.

---

1. Натуральное число назовём *гипотенузным*, если оно может быть представлено в виде суммы двух квадратов целых неотрицательных чисел. Докажите, что любое натуральное число, большее 10, является разностью двух гипотенузных.

2. Близорукая ладья бьет все клетки своей строки и своего столбца, до которых можно дойти не более чем за 60 шагов, шагая из клетки в соседнюю по стороне. Какое наибольшее число не бьющих друг друга близоруких ладей можно расставить в квадрате 100×100?

3. В неравнобедренном треугольнике ABC проведена биссектриса BB_1. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Серединный перпендикуляр к отрезку AC пересекает окружность, описанную около треугольника AIC, в точках D и E. Точка F на отрезке B_1C выбрана так, что $AB_1 = CF$. Докажите, что точки B, D, E и F лежат на одной окружности.

4. Сумму $\dfrac{2}{3 \cdot 6} + \dfrac{2 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 9} + \ldots + \dfrac{2 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 2015}{3 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2019}$ записали в виде десятичной дроби. Найдите первую цифру после запятой.

. . . .

Олимпиада 2020 года. II тур. 11 класс. Выводная аудитория.

5. Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Окружность с центром в точке O_b проходит через точки A, C_1 и середину отрезка BH. Окружность с центром в точке O_c проходит через точки A, B_1 и середину отрезка CH. Докажите, что $B_1O_b + C_1O_c > \frac{BC}{4}$.

6. Последовательность a_n задана условиями

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2 \quad \text{и} \quad a_{n+2} = a_n(a_{n+1} + 1) \quad \text{при } n \geq 1.$$

Докажите, что a_{a_n} делится на $(a_n)^n$ при $n \geq 100$.

7. N олигархов построили себе страну с N городами, каждый олигарх владеет ровно одним городом. Кроме того, каждый олигарх построил несколько дорог между городами: любая пара городов соединена максимум одной дорогой каждого из олигархов (между двумя городами может быть несколько дорог, принадлежащих разным олигархам). Суммарно было построено d дорог. Некоторые олигархи хотели бы создать корпорацию, объединив свои города и дороги, так чтобы при этом из любого города корпорации можно было доехать до любого другого ее города по дорогам этой корпорации, возможно, заезжая по дороге в города других олигархов. Но оказалось, что никакая группа, в которой меньше N олигархов, создать корпорацию не может! При каком наибольшем d это возможно?