САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2020 года ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 6 класс.

---

1. Первого сентября дети принесли в школу розы и гвоздики. 101 мальчиков и 3 девочки встали по кругу, каждый держал в руках все свои цветы. Оказалось, что у каждого мальчика ровно 50 цветков. По сигналу директора каждый из детей передал все свои гвоздики соседу слева. После этого оказалось, что у каждого мальчика ровно 49 цветков. Докажите, что никакие две девочки не стояли рядом.

2. Есть 111 детей. Они весят одинаковое число граммов и всегда говорят правду, кроме одного, который весит меньше и всегда лжет. Подслеповатая воспитательница ставит на чаши весов по 55 детей, после чего ребенок, не участвовавший во взвешивании, сообщает воспитательнице, которая из чаш перевесила (или что весы в равновесии). Сможет ли воспитательница с помощью таких операций найти фальшивого ребенка?

3. Назовем число *сложным*, если оно имеет не меньше двух различных простых делителей. Найдите наибольшее натуральное число, которое нельзя представить в виде суммы двух сложных чисел.

4. На доске написано десятизначное число. Можно взять любую цифру этого числа, меньшую 8, прибавить к ней 1 или 2 и записать на доску получившееся новое число вместо старого. Эту операцию проделали 55 раз, последнее число тоже оказалось десятизначным. Докажите, что хотя бы одно из 56 чисел, которые выписывались на доску в этом эксперименте, было составным.

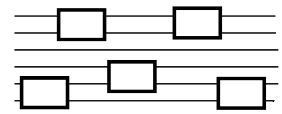
. . . .

Олимпиада 2020 года. II тур. 6 класс. Выводная аудитория.

5. Дима и Гоша играют в “нолики-нолики” на доске 14×441. За один ход можно поставить один нолик в любую пустую клетку. Ходят по очереди, первым ходит Гоша. Выигрывает тот игрок, после хода которого образуется 7 подряд стоящих ноликов по вертикали или по горизонтали. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл его соперник?

6. В спортзале собралось 200 школьников. Каждые двое знакомых пожали друг другу руки. Оказалось, что любые двое незнакомых сделали в сумме не меньше 200 рукопожатий. Докажите, что всего произошло как минимум 10 000 рукопожатий.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2020 года ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 7 класс.



1. Имеется несколько параллельных рельсов. На этих рельсах стоят 30 грузовых и 20 пассажирских вагонов, каждый вагон — на двух соседних рельсах. Вагон называется *подвижным*, если оба рельса, на которых он стоит, не заняты другими вагонами (на приведенном рисунке нет подвижных вагонов). Среди пассажирских вагонов подвижных ровно 10, а среди грузовых — ровно 9. Докажите, что есть рельс, на котором стоят колёса хотя бы двух грузовых вагонов.

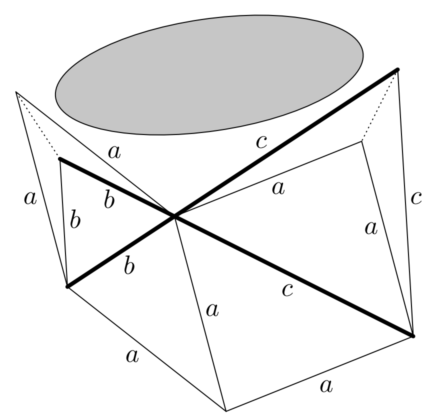
2. Пара натуральных чисел $a > b$ называется *хорошей*, если НОК этих чисел делится на их разность. Среди всех натуральных делителей числа n удалось найти ровно одну хорошую пару. Чему может быть равно n?

3. В равнобедренном треугольнике ABC проведена биссектриса AK. На основании AC выбрана точка D так, что $BC = CD$. Докажите, что можно сложить равнобедренный треугольник с боковой стороной BK и основанием BD.

4. Дима и Гоша играют в "нолики-нолики". В начале игры Гоша рисует таблицу $14 \times n$ (число n выбирает Гоша). За один ход можно поставить один нолик в любую пустую клетку. Ходят по очереди, первым ходит Гоша. Выигрывает тот игрок, после хода которого образуется 7 подряд стоящих ноликов по вертикали или по горизонтали. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл его соперник?

. . . .

Олимпиада 2020 года. II тур. 7 класс. Выводная аудитория.



5. Возле озера разбит парк, на рисунке приведена его схема. Все дорожки в парке прямые (и без перепадов высот). На схеме указаны длины всех участков дорог. Две пересекающиеся прямые дорожки заасфальтированы, эти дорожки на схеме выделены жирным. Планируется проложить еще две прямые дорожки, изображенные пунктиром. Докажите, что они будут иметь одинаковую длину.

6. В вершинах выпуклого 2020-угольника расставлены числа, причем среди любых трех последовательных вершин найдется как вершина с числом 7, так и с числом 6. На каждом отрезке, соединяющем две вершины, написано произведение чисел в этих двух вершинах. Андрей посчитал сумму чисел, написанных на сторонах многоугольника, и получил в сумме A, а Саша — на диагоналях, соединяющих вершины через одну, и получил в сумме C. Найдите наибольшее возможное значение разности $C - A$.

7. На доске написано натуральное число M. Оля выбирает натуральное число N и приписывает к числу M справа число 1, затем число 2, и т.д. до числа N. Докажите, что Оля может выбрать число N таким образом, чтобы получившееся число делилось на 77.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2020 года ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 8 класс.

1. В каждой клетке доски 10×10 стоят нули. За один ход можно прибавить по единице ко всем числам одной строки или ко всем числам одного столбца. После нескольких ходов оказалось, что во всех клетках диагонали, идущей из левого верхнего угла в правый нижний, стоят одинаковые числа, причем они не меньше чем любое из оставшихся чисел на доске. Докажите, что все числа на доске равны.

2. На луче $(0, +\infty)$ числовой прямой расположены несколько (более двух) отрезков длины 1. Для каждых двух разных отрезков на них можно выбрать по одному числу так, чтобы эти числа отличались ровно в 2 раза. Левый конец самого левого отрезка — число a, правый конец самого правого отрезка — число b. Какое наибольшее значение может принимать величина $b - a$?

3. Дан равнобедренный треугольник ABC. На продолжениях основания AC за точки A и C выбраны точки D и E соответственно. На продолжении CB за точку B выбрана точка F. Известно, что $AD = BF$ и $CE = CF$. Докажите, что $BD + CF > EF$.

4. Дан 129-угольник. Петя и Вася играют в игру. Они по очереди отмечают вершины этого многоугольника, первый ход делает Петя. Петя каждым своим ходом может отметить любую ещё не отмеченную вершину. Вася своим ходом может отметить любую неотмеченную вершину, находящуюся через одну от той, которую на последнем ходу отметил Петя. Игра заканчивается, когда Вася не сможет сделать свой ход. Какое наибольшее количество ходов заведомо сможет сделать Вася независимо от игры Пети?

. . . .

Олимпиада 2020 года. II тур. 8 класс. Выводная аудитория.

5. У Саши есть очень длинная полоска бумаги и 2019-значное число n. Он выписывает на полоску подряд без пробелов последовательные натуральные числа, начиная с n: n, $n+1$, $n+2$, ... Докажите, что рано или поздно после выписывания очередного числа на полоске окажется число, делящееся на 101.

6. Внутри равностороннего треугольника ABC выбраны точки P и Q таким образом, что P находится внутри треугольника AQB, $PQ = QC$ и $\angle PAQ = \angle PBQ = 30°$. Найдите $\angle AQB$.

7. На доске нарисован выпуклый 1000-угольник. Дима хочет отметить в нем 500 точек и соединить каждую из них ломаными хотя бы с четырьмя вершинами. Все эти ломаные должны не пересекать друг друга и сторон 1000-угольника (но могут иметь общие концы). Удастся ли ему это сделать?