САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2019 года ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 6 класс.

---

1. Клетки таблицы 4×4 заполнены целыми числами. В каждой строке и каждом столбце посчитали произведение всех чисел. Могли ли получиться числа 1, 5, 7, 2019, -1, -5, -7, -2019 в некотором порядке? (*А. Храбров*)

2. Будем называть *простенькими* все нечетные простые числа, а также число 1. В ряд стоят 2019 рыцарей и лжецов. Каждый из них сказал: "Количества рыцарей справа и слева от меня отличаются на простенькое число". Сколько рыцарей может быть в этом ряду? (*А. Кузнецов*)

3. Для каждого числа от 1 до 1000 выписали все его натуральные делители (в результате некоторые числа выписаны много раз). Определите, что больше: сумма всех выписанных чисел или миллион? (*А. Храбров*)

4. В марсианском календаре дни недели называются так же, как у нас, но в каждой неделе может быть от одной до семи пятниц, из-за чего неделя может длиться от 7 до 13 дней. В разных неделях может быть разное число пятниц. Министру принесли календарь на ближайшие 2019 недель. Министр решает, какие дни недели он на этот период времени объявит выходными. (Например, он может сделать выходными все понедельники, среды и воскресенья, или просто все четверги). Докажите, что он может сделать это так, чтобы в каждой неделе не меньше $2/7$ от числа дней этой недели были выходными, но при этом суммарно выходными были не более половины дней. (*Н. Власова*)

. . . .

Олимпиада 2019 года. II тур. 6 класс. Выводная аудитория.

5. Спортзал в виде квадрата со стороной 100 метров замощен квадратными плитками 1м$\times$1м. Двое по очереди покрывают пол спортзала матами. Каждый мат покрывает две соседние по стороне плитки пола. Начинающий игру своим ходом кладет один мат, а второй игрок — сразу три мата. Плитки, на которые кладут очередной мат, могли быть покрыты матами на предыдущих ходах (возможно, что разные плитки покрыты разным числом матов), но ни в какой момент игры ни одна плитка не должна быть покрыта более чем пятью матами. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Докажите, что при правильной игре выиграет второй игрок. (*С. Берлов*)

6. На встречу собралась компания. Назовем человека *общительным*, если в этой компании у него есть не меньше 20 знакомых, причем хотя бы двое из них знакомы между собой. Назовем человека *стеснительным*, если в этой компании у него есть не меньше 20 незнакомых, причем хотя бы двое из них незнакомы между собой. Оказалось, что в собравшейся компании нет ни общительных, ни стеснительных людей. Какое наибольшее число людей может в ней быть?

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2019 года ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 7 класс.

---

1. Курс криптовалюты Чухойн 1 марта составлял один доллар, а далее каждый день повышался на доллар. Курс криптовалюты Антониум 1 марта составлял также один доллар, а далее каждый день оказывался равным сумме вчерашних курсов Чухойна и Антониума, делённой на их произведение. Сколько стоил Антониум 31 мая (то есть на 92-й день)? (*А. Чухнов*)

2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы при вершинах A, B и C равны. На стороне AB отмечена точка E. Известно, что $AD = CD = BE$. Докажите, что CE — биссектриса угла BCD. (*А. Кузнецов*)

3. В ряд стоят несколько человек, некоторые из них рыцари, которые всегда говорят правду, а остальные — лжецы, которые всегда лгут. Каждый из них произнёс одну из двух фраз: «*Справа от меня рыцарей больше, чем слева*» или «*Слева от меня рыцарей больше, чем справа*», причем людей, сказавших каждую из фраз, было поровну. Затем каждый из них произнёс одну из двух фраз: «*Справа от меня лжецов больше, чем слева*» или «*Слева от меня лжецов больше, чем справа*». Докажите, что опять обе фразы прозвучали одинаковое число раз. (*А. Кузнецов*)

4. Существуют ли попарно различные натуральные числа a, b и c, такие что $2a + \text{НОК}(b, c) = 2b + \text{НОК}(a, c) = 2c + \text{НОК}(a, b)$?

. . . .

Олимпиада 2019 года. II тур. 7 класс. Выводная аудитория.

5. Перед Андрюшей стоят 2019 тарелок, на которых лежит суммарно 2019 пирожных. Андрюша может делать две операции.

I. Если на каких-то двух тарелках пирожных поровну, он может съесть все пирожные с одной из этих тарелок.

II. Он может переложить на пустую тарелку по одному пирожному с каждой непустой тарелки.

Докажите, что Андрюша может выполнить несколько операций так, чтобы съесть хотя бы 3 пирожных. (*А. Солынин*)

6. Саша выбрал четыре натуральных числа x, y, z, t и выписал 12 дробей:

$$\frac{x}{y},\quad \frac{x}{z},\quad \frac{x}{t},\quad \frac{y}{x},\quad \frac{y}{z},\quad \frac{y}{t},\quad \frac{z}{x},\quad \frac{z}{y},\quad \frac{z}{t},\quad \frac{t}{x},\quad \frac{t}{y},\quad \frac{t}{z}.$$

Докажите, что какие-то две дроби отличаются не больше чем на 11/60. (*А. Кузнецов*)

7. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка K. Оказалось, что $\angle ABK = 7^\circ$ и $\angle ABC = 77^\circ$. Докажите, что

$$2AK + AC > BC.$$

(*А. Кузнецов*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2019 года ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 8 класс.

---

1. Хулиган Вася недоволен своим средним баллом по математике, который опустился ниже 3. В качестве меры по резкому поднятию отметки он добрался до школьного журнала и исправил там все свои колы на тройки. Докажите, что после этого его средний балл все же не превысит 4. (*К. Тыщук*)

2. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ таковы, что $\angle B + \angle B_1 = 180^\circ$ и $\angle A = \angle A_1$. Докажите, что если $A_1B_1 = AC + BC$, то $AB = A_1C_1 - B_1C_1$. (*А. Кузнецов*)

3. Андрей, Боря, Витя и Гена играют на доске 100×2019 (100 строк, 2019 столбцов). Ходят по очереди — сначала Андрей, потом Боря, затем Витя и наконец Гена, затем снова Андрей и т. д. Каждым ходом игрок должен закрасить две незакрашенные клетки, образующие прямоугольничек из двух клеток, причем Андрей и Боря закрашивают вертикальные прямоугольнички 2×1, а Витя и Гена — горизонтальные 1×2. Проигрывает тот, кто первым не сможет сделать ход. Какие трое ребят могут договориться и играть так, чтобы оставшийся заведомо проиграл? (Достаточно привести одну такую тройку ребят.) (*С. Берлов, Н. Власова*)

4. У натурального числа n ровно 1000 натуральных делителей (включая 1 и само n). Эти 1000 делителей выписали в порядке возрастания. Оказалось, что любые два соседних делителя имеют разную четность. Докажите, что в числе n более 150 цифр. (*Ф. Петров*)

. . . .

Олимпиада 2019 года. II тур. 8 класс. Выводная аудитория.

5. Точки M и N — середины сторон BC и AD соответственно четырехугольника $ABCD$. Отрезки AM, DM, BN и CN разбивают четырехугольник $ABCD$ на семь частей (шесть из которых треугольники, а седьмая — четырехугольник). Докажите, что если площади шести из этих частей — нечетные натуральные числа, то все эти шесть частей — треугольники. (*А. Кузнецов, Д. Ширяев*)

6. На доске написаны числа $1, 1, -1$. Время от времени к доске подходит Михаил, стирает два числа a и b и заменяет их на $2a + c$ и $\frac{b-c}{2}$, где c — третье из написанных в этот момент на доске чисел. Докажите, что на доске всегда будет хотя бы одно отрицательное число. (*М. Антипов*)

7. Компания называется *хорошей*, если в ней у каждого человека ровно восемь знакомых, а среди любых семерых человек из этой компании найдутся двое незнакомых. Верно ли, что любую хорошую компанию можно рассадить по семи комнатам так, что никакие двое знакомых не попадут в одну комнату?