САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2017 года ПО МАТЕМАТИКЕ

I тур. 6 класс.

1. Сережа отметил в календаре 6 последовательных дней апреля и выписал, на какие числа месяца пришлись эти дни. Получилось 6 последовательных чисел, выписанных по возрастанию. Маша перемножила первые четыре из этих чисел, Таня последние четыре, а Серёжа — все, кроме двух крайних. У Маши и Тани последние цифры результатов совпали, а у Серёжи получилась другая последняя цифра. Какая? Найдите все возможные ответы и докажите, что других нет. (*А. Голованов*)

2. На Урюпинской Кольцевой автомобильной дороге расположено пять деревень. Из каждой деревни в какие-то две из других деревень можно добраться на автобусе за 2 часа, а в остальные две — на велосипеде за 4 часа (не делая остановок по дороге и проезжая по пути не более одной деревни). Скорость автобуса всегда одинакова, скорость велосипеда тоже всегда одинакова и меньше скорости автобуса. За сколько времени можно объехать на автобусе всю кольцевую дорогу? (*А. Голованов*)

3. В таблице с 4 строками и 9 столбцами имеется 9 красных клеток, 11 синих и 16 белых. Если щелкнуть мышкой по строке или по столбцу, произойдет следующее: если в этой линии клеток какого-то цвета было больше, чем каждого из двух других цветов, то вся линия перекрасится в этот цвет; если же такого цвета не было, то ничего не произойдет. Оказалось, что если щелкнуть сначала по всем строкам, а затем по всем столбцам, то все клетки станут красными. А если вместо этого щелкнуть сначала по всем столбцам, а потом по всем строкам, то все клетки станут синими. Приведите пример такой таблицы. (*О. Иванова*)

4. Во дворе стоят 5 домов, в них живет 5, 15, 25, 35, 45 человек. Известно, что у каждого есть не менее двух тезок среди жителей двора. Докажите, что у кого-то есть тезка в своем доме. (*О. Иванова*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2017 года ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 7 класс.

---

1. Справа изображена таблица, заполненная "змейкой": в первой строке слева направо выписаны по возрастанию числа, начиная с 1, потом этот ряд чисел продолжается во второй строке справа налево, потом в третьей строке — снова слева направо и т.д. У Андрея есть более крупная таблица, тоже заполненная змейкой, начиная с числа 1. В ней нашелся фрагмент 2×2 с числами

13	12
32	33

. Сколько столбцов в таблице Андрея? Приведите все возможные варианты ответа и докажите, что других нет. (*А. Солынин*)

1	2	3
6	5	4
7	8	9
12	11	10

2. На доске написано 10 натуральных чисел. Все их последние цифры различны. Кроме того, все их предпоследние цифры различны. Докажите, что сумма этих десяти чисел не может быть точным квадратом. (*А. Голованов*)

3. В океане расположено три острова A, B и C, причем расстояния от A до B и от B до C — по 50 км, а от A до C — 70 км. Одновременно из A в C отправилась яхта, а из C в B — катер, оба со скоростью 10 км/ч. Через два часа яхта села на мель и стала подавать сигнал бедствия. Катер тут же изменил курс, увеличил скорость вдвое и последовал к яхте. С острова B к яхте отправилась спасательная лодка со скоростью 20 км/ч. Докажите, что лодка и катер доберутся до яхты одновременно. (*А. Кузнецов*)

4. Вдоль дороги в стране Дураков растут 10 кустов, на каждом кусте по 9 монет. Прохожим разрешено срывать с каждого куста 2, 3 или 4 монеты, но при этом никто не должен срывать поровну монет с соседних кустов, иначе охранники арестуют нарушителя. Алиса, потом Буратино и после них Василио прошли вдоль дороги и сорвали все монеты. Алиса сорвала не менее 35 монет. Докажите, что один из двух других сорвал меньше 26 монет. (*К. Сухов*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2017 года ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 8 класс.

---

1. Стоимость алмаза в рублях равна квадрату его массы в граммах, умноженному на 100, а стоимость горного хрусталя в рублях в три раза больше его массы в граммах. Двое братьев получили в наследство несколько камней общей стоимостью 3 000 000 рублей. Братья распилили каждый камень пополам и взяли себе по половинке каждого камня. Оказалось, что каждый из братьев получил камней на 1 000 000 рублей. Сколько стоили изначально алмазы в наследстве? (*А. Солынин*)

2. Во дворе стоят 5 домов, в них живет 5, 15, 25, 35, 45 человек. Известно, что у каждого есть не менее двух тезок среди жителей двора. Докажите, что у кого-то есть тезка в своем доме. (*О. Иванова*)

3. В варианте олимпиады 7 задач, каждая оценивается в 8 баллов. По результатам проверки все участники набрали разное число баллов. Члены оргкомитета втихаря исправили оценки 0 на 6, 1 на 7, 2 на 8. В результате этого участники упорядочились в точности в обратном порядке. Какое наибольшее количество участников могло быть? Приведите пример и докажите, что большее число участников невозможно.

(*В. Франк*)

4. В треугольнике ABC проведена медиана AD. Точка E на отрезке AC такова, что $\angle ADB = \angle CDE$. Докажите, что периметр треугольника ADC больше периметра четырехугольника $ABDE$. (*А. Кузнецов*)

5. Два натуральных числа отличаются на 10. Десятичная запись их произведения состоит из одних девяток. Найдите эти числа.

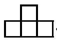
(*А. Кузнецов*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2017 года ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 9 класс.

---

1. Квадратный трехчлен x^2+px+q имеет два различных ненулевых целых корня a и b. Известно, что $a+p$ делится на $q-2b$. Чему может быть равно число a? (Приведите все ответы и докажите, что других нет.)

(*А. Храбров, С. Берлов*)

2. Сто клетчатых фанерных прямоугольников 5×6 распилили по клеточкам на куски, и из всех этих кусков составили несколько квадратов 2×2 и несколько фигурок вида . Найдите, при каком наименьшем числе кусков это возможно сделать, если куски можно поворачивать и переворачивать.

(*А. Храбров*)

3. На боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$ выбраны точки X и Z соответственно. Отрезки CX и BZ пересекаются в точке Y. Оказалось, что пятиугольник $AXYZD$ — вписанный. Докажите, что $AY=DY$.

(*А. Кузнецов*)

4. Перед открытием жилконторы к окошку в ней стояла очередь из 100 человек, и в течение дня приходили еще люди. Когда очередной клиент подходит к окошку, работница жилконторы делит время, оставшееся до конца рабочего дня, на текущее количество человек в очереди (включая подошедшего) и обслуживает его ровно столько времени, сколько получилось в частном. Всего за день было обслужено 130 человек. Докажите, что найдутся пять клиентов, которых обслуживали одинаковое время.

(Считается, что перерыва на обед нет и что никто не становится в конец очереди в тот момент, когда очередной клиент подходит к окошку.)

(*Н. Власова*)

5. На экране однокнопочного калькулятора горит натуральное число. Калькулятор при нажатии на кнопку заменяет число n на число $\left[(1+\sqrt{3})n+\frac{1}{2}\right]$. Дима много раз нажимает на кнопку калькулятора, на экране одно за другим появляются числа. Докажите, что каждое следующее число на экране калькулятора равно удвоенной сумме двух предыдущих.

(*А. Храбров*)

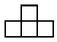
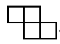
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2017 года ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 10 класс.

---

1. Квадратный трехчлен x^2+px+q имеет два различных ненулевых целых корня a и b. Известно, что $a+p$ делится на $q-2b$. Чему может быть равно число a? (Приведите все ответы и докажите, что других нет.)

(А. Храбров, С. Берлов)

2. Могут ли графики функций $y=ax+b$, $y=ax+c$, $y=bx+a$, $y=bx+c$, $y=cx+a$, $y=cx+b$ содержать стороны и диагонали некоторого четырёхугольника? *(А. Солынин)*

3. Сто клетчатых фанерных прямоугольников 6×7 распилили по клеточкам на куски, и из всех этих кусков составили несколько несколько фигурок вида  и и несколько фигурок вида . Найдите, при каком наименьшем числе кусков это возможно сделать, если куски можно поворачивать и переворачивать (фигурка может быть составлена из любого числа кусков, в том числе, из одного). *(А. Храбров)*

4. В треугольник ABC вписана окружность ω. Известно, что $\angle A=43^\circ$. Внешние биссектрисы $\angle B$ и $\angle C$ пересекаются в точке D. Из точки D проведена касательная DE к окружности ω. Найдите $\angle BEC$.

(А. Кузнецов)

5. Последовательность натуральных чисел a_n задана первым членом $a_1>2000$ и правилом $a_{n+1}=a_n/2$, если a_n — четное, $a_{n+1}=3a_n+1$, если a_n — нечетное. Докажите, что в этой последовательности встретится число, делящееся на 4. *(Н. Филонов)*

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2017 года ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 11 класс.

---

1. Можно ли расставить в таблице 7×9 числа от 1 до 63 так, чтобы в каждом квадрате 2×2 сумма чисел была нечетна? (*А. Храбров*)

2. Перед открытием жилконторы к окошку в ней стояла очередь из 100 человек, и в течение дня приходили еще люди. Когда очередной клиент подходит к окошку, работница жилконторы делит время, оставшееся до конца рабочего дня, на текущее количество человек в очереди (включая подошедшего), и обслуживает его ровно столько времени, сколько получилось в частном. Всего за день было обслужено 130 человек. Докажите, что найдутся пять клиентов, которых обслуживали одинаковое время.

(Считается, что перерыва на обед нет и что никто не становится в конец очереди в тот же момент, когда очередной клиент подходит к окошку.) (*Н. Власова*)

3. Существуют ли такие натуральные числа a, b, c, что a и b имеют ровно 1000 общих делителей, a и c имеют ровно 720 общих делителей, а a, b, c имеют ровно 350 общих делителей? (*А. Солынин, Ф. Петров*)

4. График кубического многочлена $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ высекает на прямой, параллельной оси абсцисс, два отрезка длины 1, а на прямой, параллельной прямой $y = x$, два отрезка, длина одного из которых равна $\sqrt{2}$. Чему может быть равна длина второго? (*А. Голованов, Ф. Петров*)

5. Площадь поверхности тетраэдра $ABCD$ равна S. Известно, что $AB = 6$, $BC = 9$, $CD = 7$, $DA = 2$. Докажите, что $S > AC \cdot BD$.

(*А. Кузнецов*)