САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2017 года ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 6 класс.

---

1. На доске написаны 10 натуральных чисел. Оказалось, что произведение любых четырёх из них кратно 30. Докажите, что хотя бы одно из написанных чисел само по себе кратно 30. (*А. Голованов*)

2. Назовём *перестройкой* натурального числа перестановку любых двух его соседних цифр. Найдите все 19-значные числа, которые в результате любой перестройки, кроме, быть может, одной, увеличиваются. (*С. Берлов*)

3. Хулиган Вася проживает в N-этажном доме с лифтом (оборудованным кнопками с номерами всех этажей от первого до N-го). Вася покатался на лифте, и теперь этот лифт не всегда реагирует на нажатие кнопки. Именно, если, находясь на a-м этаже, нажать на кнопку b-го этажа, лифт поедет туда только при выполнении одного из двух условий: если $a + b$ делится на 2017 или если $a - b$ делится на 2018. В ответ на критику Вася говорит, что с помощью этого лифта можно добраться с любого этажа на любой другой. При каком наименьшем N это может быть правдой? (*А. Солынин*)

4. На очень большой доске записано натуральное число $100\ldots000$ (2017 нулей). Вася и Петя по очереди делают ходы, начинает Петя. Каждый игрок может стереть написанное на доске число и заменить его на меньшее число, не являющееся его делителем. Игрок, который не может этого сделать, проигрывает. Кто из игроков может выиграть, как бы ни ходил другой? (*А. Чухнов*)

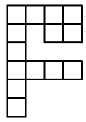
. . . .

Олимпиада 2017 года. II тур. 6 класс. Выводная аудитория.

5. Все клетки доски 8×9 покрашены в серый цвет. В противоположных углах доски стоят фигуры «БКС-маляр» и «БСК-маляр». Из клетки, в которой стоит БКС-маляр, он может перейти в любую соседнюю (по стороне) свободную клетку и перекрасить её: из белого цвета — в красный, из красного — в серый, из серого — в белый. БСК-маляр при своём ходе тоже переходит в соседнюю по стороне свободную клетку, но перекрашивает её из белого цвета в серый, из серого в красный, а из красного в белый. Маляры ходят по очереди, первым ходит БКС-маляр. Докажите, что БСК-маляр независимо от ходов первого может действовать так, чтобы серых клеток всегда было не менее 40. (*Е. Куликова*)

6. В школе мальчики составляли целое число процентов от общего числа учащихся. После Нового года в школу пришёл ещё один мальчик и ещё две девочки, и мальчики по-прежнему составляют целое число процентов от общего числа учащихся. Докажите, что в Старом году учащихся было менее двухсот. (*А. Солынин*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2017 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 7 класс.



1. Какое наибольшее число непересекающихся букв F (см. рисунок) можно вырезать из квадрата 300×300? Фигурки можно поворачивать и переворачивать. (*А. Солынин*)

2. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки D и E соответственно, так что $AD = AE$. Докажите, что из отрезков BE, CD и BC можно составить треугольник. (*А. Кузнецов*)

3. На доске написаны числа от 1 до 1 000 000. Андрей стёр все простые числа. Затем Надя стёрла все числа, делящиеся на хотя бы одно из чисел

$$2,\ 3,\ 4,\ \ldots,\ 100, \qquad 1000,\ 1001,\ 1002,\ \ldots,\ 10000.$$

Докажите, что произведение оставшихся чисел является степенью (больше первой) некоторого натурального числа. (*С. Берлов, А. Солынин*)

4. В кружке 49 учеников. Известно, что если трое кружковцев попарно незнакомы друг с другом, то какие-то двое из них имеют в кружке общего знакомого. Докажите, что кто-то из учеников имеет в кружке хотя бы 6 знакомых.

(*С. Берлов*)

. . . .

Олимпиада 2017 года. II тур. 7 класс. Выводная аудитория.

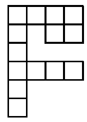
5. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Известно, что $\angle A = 45°$, $\angle ADC = \angle ACD = 75°$, $AB = CD = 1$. Найдите BC. (*А. Солынин*)

6. Палиндромом называется натуральное число, которое одинаково читается слева направо и справа налево.

Дано простое число $p \leq 2017$. Докажите, что существует палиндром из не более чем 449 цифр, кратный p. (*А. Солынин*)

7. В каждой клетке прямоугольника $m \times n$ провели две диагонали, в результате чего прямоугольник оказался разбит на $4mn$ треугольников. Все треугольники покрасили в черный или белый цвет, так что при этом каждый белый треугольник имеет общую сторону хотя бы с одним черным. Какое наименьшее количество черных треугольников могло быть в такой раскраске? (*Н. Власова, С. Берлов*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2017 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
II ТУР. 8 КЛАСС.



1. Какое наибольшее число непересекающихся букв F (см. рисунок) можно вырезать из квадрата 300×300? Фигурки можно поворачивать и переворачивать.

2. На доске написаны числа от 1 до 1 000 000. Андрей стёр все простые числа. Затем Надя стёрла все числа, делящиеся на хотя бы одно из чисел

$$2,\ 3,\ 4,\ \ldots,\ 100, \qquad 1000,\ 1001,\ 1002,\ \ldots,\ 10000.$$

Докажите, что произведение оставшихся чисел является степенью (больше первой) некоторого натурального числа. (*С. Берлов, А. Солынин*)

3. Сережа выписывает в строчку различные числа. Для каждого очередного числа среди написанных ранее количество чисел, бо́льших его, и количество чисел, меньших его, отличаются не более чем на 1. Известно, что 84-е число меньше, чем 219-е. Какое число больше: 83-е или 2017-е? (*А. Голованов*)

4. На стороне CD параллелограмма $ABCD$ выбраны точки E_1 и E_2 так, что $AB = BE_1 = BE_2$. На луче AE_1 выбрана точка F_1 так, что $BE_1 \parallel CF_1$, а на луче AE_2 выбрана точка F_2 так, что $BE_2 \parallel CF_2$. Докажите, что $DF_1 = DF_2$.
(*А. Кузнецов*)

Олимпиада 2017 года. II тур. 8 класс. Выводная аудитория.

5. На предприятии работают несколько сотрудников, зарплата каждого составляет целое число тугриков (разные сотрудники могут иметь разную зарплату). Инкассаторы привезли на предприятие n монет по 1 тугрику, n монет по 2 тугрика, …, n монет по 2017 тугриков. Привезенные деньги — это в точности суммарная зарплата всех сотрудников. При каком наибольшем количестве сотрудников зарплату заведомо удастся раздать (так, что каждый получит в точности причитающуюся ему сумму)? (*В. Франк*)

6. Медианы треугольника ABC пересекаются в точке M. На прямой, проходящей через точку A параллельно BC, выбрана точка D так, что $\angle CMD = 90^\circ$. Площадь четырехугольника $AMCD$ равна S. Докажите, что $AB \cdot CD \geq 2S$. (*А. Кузнецов*)

7. Петя и Вася играют в игру: дана клетчатая полоса 1×99, в которой первая и последняя клетки помечены точками. Ходят по очереди, начинает Петя. За один ход можно закрасить две соседние по стороне незакрашенные клетки. Также один раз за игру (один раз на двоих) можно закрасить одну незакрашенную клетку с точкой. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из мальчиков выиграет при правильной игре? (*С. Берлов*)