



Комитет по образованию Санкт-Петербурга
Санкт-Петербургский государственный университет
Российский государственный педагогический университет
Санкт-Петербургский городской дворец творчества юных
СПб отделение математического института им. В.А.Стеклова

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

13 ДЕКАБРЯ 2014 г.

I тур

10 КЛАСС

1 ВАРИАНТ

1. Дано 100 различных натуральных чисел. Они разбиты на 50 пар так, что сумма чисел в каждой паре больше 1000. Докажите, что если выписать все 100 чисел в порядке возрастания, то сумма 50-го и 51-го чисел тоже окажется больше 1000.

2. На сторонах AB и BC выпуклого четырехугольника $ABCD$ выбраны точки M и N соответственно. Отрезки MD и ND пересекают диагональ AC в точках P и Q соответственно. Оказалось, что четырехугольники $BMPC$, $BNQA$ и $AMNC$ вписанные. Докажите, что $\angle BDN = \angle BDM$.

3. Натуральные числа a и b таковы, что число $p = 8a + 19b$ — простое. Докажите, что число $ab - 7a - 17b + 2$ не делится на p .

4. У Саши на калькуляторе есть лишь три кнопки. Они запрограммированы на вычисление трех функций:

$$\frac{x+2}{2x+3}, \quad \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{6} \quad \text{и} \quad \sin(5x)$$

(при $x = -3/2$ первая кнопка не работает). Никаких других действий этот калькулятор делать не умеет. Изначально на экране горит число $1/2$. Может ли Саша получить на экране число, большее миллиона?

5. В таблице 8×10 отмечены клетки, лежащие в двух левых столбцах, а также клетки, лежащие в двух нижних строках (всего 32 клетки). Юный шахматист Алёша хочет обойти все эти клетки по разу ходом шахматного короля, начав и закончив движение в левом нижнем углу. Сколькими способами Алёша может осуществить задуманное?

Этот листок Вы можете оставить себе на память. В начале своей работы НЕ ЗАБУДЬТЕ указать о себе (БОЛЬШИМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ) следующие данные:

Фамилия, имя;

КЛАСС, ШКОЛА, РАЙОН ШКОЛЫ;

ТЕЛЕФОН;

ФАМИЛИЯ, ИМЯ, ОТЧЕСТВО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛЕ.

ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние.

Если Вы занимаетесь в кружке математики —

ФИО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ КРУЖКА, МЕСТО ЗАНЯТИЙ.

Списки прошедших на городской тур будут опубликованы на сайтах

www.pdmi.ras.ru/~olymp и www.anichkov.ru/olimpus/matem



Комитет по образованию Санкт-Петербурга
Санкт-Петербургский государственный университет
Российский государственный педагогический университет
Санкт-Петербургский городской дворец творчества юных
СПб отделение математического института им. В.А.Стеклова

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

13 ДЕКАБРЯ 2014 г.

I тур

10 КЛАСС

2 ВАРИАНТ

1. Дано 200 различных натуральных чисел. Они разбиты на 100 пар так, что сумма чисел в каждой паре меньше 2014. Докажите, что если выписать все 200 чисел в порядке возрастания, то сумма 100-го и 101-го чисел тоже окажется меньше 2014.

2. На сторонах AB и BC выпуклого четырехугольника $ABCD$ выбраны точки M и N соответственно. Отрезки MD и ND пересекают диагональ AC в точках X и Y соответственно. Оказалось, что четырехугольники $AMYD$, $CNXD$ и $MNYX$ вписанные. Докажите, что $\angle ABD = \angle CBD$.

3. Натуральные числа u и v таковы, что число $p = 17u + 10v$ — простое. Докажите, что число $uv - 14u - 9v + 3$ не делится на p .

4. У Феди на калькуляторе есть лишь три кнопки. Они запрограммированы на вычисление трех функций:

$$\frac{x+2}{x-4}, \quad \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{6} \quad \text{и} \quad \cos(7x)$$

(при $x = 4$ первая кнопка не работает). Никаких других действий этот калькулятор делать не умеет. Изначально на экране горит число $3/4$. Может ли Федя получить на экране число, большее ста тысяч?

5. В таблице 9×9 отмечены клетки, лежащие в двух левых столбцах, а также клетки, лежащие в двух верхних строках (всего 32 клетки). Любитель шахмат Алексей хочет обойти все эти клетки по разу ходом шахматного короля, начав и закончив движение в левом верхнем углу. Сколькими способами Алексей может осуществить задуманное?

Этот листок Вы можете оставить себе на память. В начале своей работы НЕ ЗАБУДЬТЕ указать о себе (БОЛЬШИМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ) следующие данные:

Фамилия, имя;

КЛАСС, ШКОЛА, РАЙОН ШКОЛЫ;

ТЕЛЕФОН;

ФАМИЛИЯ, ИМЯ, ОТЧЕСТВО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛЕ.

ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние.

Если Вы занимаетесь в кружке математики —

ФИО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ КРУЖКА, МЕСТО ЗАНЯТИЙ.

Списки прошедших на городской тур будут опубликованы на сайтах

www.pdmi.ras.ru/~olymp и www.anichkov.ru/olimpus/matem