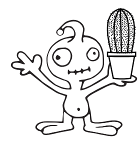
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2015 года ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 6 класс.

1. В гильдии ювелиров есть два кольца по цене 10 и 30 гулденов и 4 драгоценных камня по цене 60, 70, 80 и 90 гулденов. В гильдии можно заказать изготовление перстня Мудрости, для этого требуется кольцо и два драгоценных камня. Цена такого заказа равна произведению цен требуемых компонентов. У послушника Васи есть всего 200 000 гулденов. Сможет ли он заказать себе два перстня?

(*А. Храбров, К. Сухов, К. Кохась*)

2. В сидячем вагоне поезда стоят трехместные скамейки для пассажиров: 20 рядов по 2 скамейки. Костя заметил, что на каждом ряду сидит 3 или 5 человек. Потом Костя подсчитал, на скольких скамейках сидит 3 человека и на скольких — один человек. Найдите сумму Костиных чисел. (*К. Кохась*)

3. На межпланетный фестиваль «Радуга» прибыли 107 зелёных и фиолетовых человечков. Зелёные человечки правильно воспринимают цвета, а фиолетовым, к сожалению, зелёный кажется фиолетовым, и наоборот. Посмотрев вокруг, каждый участник фестиваля подошёл к кому-то, сказал «*Какой вы фиолетовый!*» и подарил кактус. Докажите, что хотя бы один человек на фестивале не получил такого подарка. (*А. Чухнов*)



4. Антиподом натурального числа называется число, записанное теми же цифрами в обратном порядке. Федя взял пятизначное число, в записи которого нет нулей и все цифры различны, причем первая цифра больше пятой. Далее Федя вычел из этого числа его антипод; результат оказался пятизначным числом. Этот результат Федя сложил с его антиподом. Какие ответы могли получиться у Феди? Найдите все варианты и докажите, что других нет. (*Ф. Бахарев*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2015 года ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 7 класс.

1. В сидячем вагоне поезда стоят трехместные скамейки для пассажиров: 20 рядов по 2 скамейки. Костя заметил, что на каждом ряду сидит 3 или 5 человек. Потом Костя подсчитал, на скольких скамейках сидит 3 человека и на скольких — один человек. Найдите сумму Костиных чисел. (*К. Кохась*)

2. На новогодний праздник пришли 99 мстительных детей. В гардеробе каждый из них обругал кого-то из остальных, причём никто не был обруган дважды. Когда Дед Мороз предложил всем загадать по два желания, первым желанием каждого ребенка было получить огромное мороженое, а вторым — чтобы его обидчик не получил мороженое. Докажите, что у кого-то из детей сбудется ровно одно из загаданных желаний. (*А. Солынин*)

3. Можно ли прямоугольник разрезать на три прямоугольника A, B, C так, чтобы у A был самый большой периметр, у B самая большая площадь, а у C самая большая диагональ? Не забудьте обосновать ответ. (*К. Кохась*)

4. На извилистой реке расположены три города A, B и C (не обязательно именно в таком порядке и не обязательно в одном часовом поясе). Между городами ходят катера, скорость катера в 6 раз больше скорости реки. Ниже приведен фрагмент расписания, время везде указано местное, каждое путешествие укладывается в один день.

Маршрут	Отправление	Прибытие
Из C в B	7:00	15:00
Из A в C	7:00	20:00
Из B в A	7:00	22:00

Таня, находясь в самом верхнем (по течению реки) из трёх городов, уронила мячик. Через какое время его увидят жители самого нижнего города, если мячу не мешать плыть по течению? (*А. Солынин*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2015 года ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 8 класс.

1. В сидячем вагоне поезда стоят трехместные скамейки для пассажиров: 20 рядов по 2 скамейки. Костя заметил, что на каждом ряду сидит 3 или 5 человек. Потом Костя подсчитал, на скольких скамейках сидит 3 человека и на скольких — один человек. Найдите сумму Костиных чисел. (*К. Кохась*)

2. Какие простые числа можно представить в виде

$$|n-1|+|n-2|+|n-3|+|n-4|+|n-5|$$

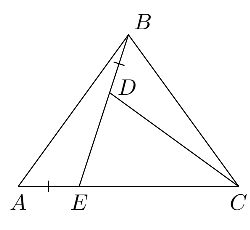
при целых n? (*А. Храбров, В. Франк, Д. Ростовский*)

3. На межпланетный фестиваль «Радуга» прибыло 107 зелёных и фиолетовых человечков. Зелёные человечки правильно воспринимают цвета, а фиолетовым, к сожалению, зелёный кажется фиолетовым, и наоборот. Посмотрев вокруг, каждый участник фестиваля подошёл к кому-то, сказал «*Какой вы фиолетовый!*» и подарил кактус. Какое наименьшее количество человечков могло не получить ни одного кактуса? (*А. Чухнов*)

4. На извилистой реке расположены три города A, B и C (не обязательно именно в таком порядке и не обязательно в одном часовом поясе). Между городами ходят катера, скорость катера в 6 раз больше скорости реки. Ниже приведен фрагмент расписания, время везде указано местное, каждое путешествие укладывается в один день.

Маршрут	Отправление	Прибытие
Из C в B	7:00	15:00
Из A в C	7:00	20:00
Из B в A	7:00	22:00

Таня, находясь в самом верхнем (по течению реки) из трёх городов, уронила мячик. Через какое время его увидят жители самого нижнего города, если мячу не мешать плыть по течению? (*А. Солынин*)



5. На стороне AC треугольника ABC выбрана точка E, а на отрезке BE — точка D. Известно, что $BD = AE$, $CE = CD = BE$. Докажите, что $\angle B > 60°$. (*А. Смирнов*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2015 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
I ТУР. 9 КЛАСС.

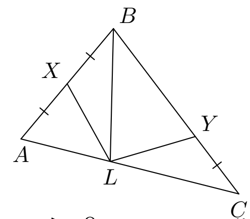
---

1. В сидячем вагоне поезда стоят трехместные скамейки для пассажиров: 20 рядов по 2 скамейки. Костя заметил, что на каждом ряду сидит 3 или 5 человек. Потом Костя подсчитал, на скольких скамейках сидит 3 человека и на скольких — один человек. Найдите сумму Костиных чисел. (*К. Кохась*)

2. Даны 100 различных натуральных чисел. Они разбиты на 50 пар так, что сумма в каждой паре больше 1000. Докажите, что если выписать все 100 чисел в порядке возрастания, то сумма 40-го и 61-го чисел тоже больше 1000. (*С. Берлов, А. Солынин*)

3. Натуральные числа a, b таковы, что $p = 8a + 19b$ — простое число. Докажите, что число $n = ab - 7a - 18b + 1$ не делится на p. (*Ф. Петров*)

4. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL. Известно, что $\angle ABC = 2\angle ACB$. Точка X — середина стороны AB, а точка Y на стороне BC такова, что $CY = AX$. Докажите, что прямая XY касается описанной окружности треугольника LCY. (*А. Пастор*)



5. Дан квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + px + q$, где $p, q \geqslant 0$, имеющий два различных вещественных корня. Натуральные числа a и b таковы, что $f(a) < f(b) < 1{,}001 f(a)$. Докажите, что $f(b) - f(a) > 4001$. (*А. Храбров*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2015 года ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 10 класс.

1. Дано 100 различных натуральных чисел. Они разбиты на 50 пар так, что сумма чисел в каждой паре больше 1000. Докажите, что если выписать все 100 чисел в порядке возрастания, то сумма 50-го и 51-го чисел тоже окажется больше 1000. (*С. Берлов*)

2. На сторонах AB и BC выпуклого четырехугольника $ABCD$ выбраны точки M и N соответственно. Отрезки MD и ND пересекают диагональ AC в точках P и Q соответственно. Оказалось, что четырехугольники $BMPC$, $BNQA$ и $AMNC$ вписанные. Докажите, что $\angle BDN = \angle BDM$. (*А. Смирнов*)

3. Натуральные числа a, b таковы, что $p = 8a + 19b$ — простое число. Докажите, что число $n = ab - 7a - 18b + 1$ не делится на p. (*Ф. Петров*)

4. У Саши на калькуляторе есть лишь три кнопки. Они запрограммированы на вычисление трех функций:

$$\frac{x+2}{2x+3}, \qquad \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{6} \quad \text{и} \quad \sin(5x)$$

(при $x = -3/2$ первая кнопка не работает). Никаких других действий этот калькулятор делать не умеет. Изначально на экране горит число $1/2$. Может ли Саша получить на экране число, большее миллиона?

(*А. Храбров, А. Смирнов, Ф. Петров*)

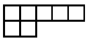
5. В таблице 8×10 отмечены клетки, лежащие в двух левых столбцах, а также клетки, лежащие в двух нижних строках (всего 32 клетки). Юный шахматист Алёша хочет обойти все эти клетки по разу ходом шахматного короля, начав и закончив движение в левом нижнем углу. Сколькими способами Алёша может осуществить задуманное?

(*А. Федотов*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2015 года ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 11 класс.

1. В выборах царя зверей в зоопарке участвовало четыре кандидата: Кабан, Лев, Медведь и Носорог. Число проголосовавших за Кабана оказалось ровно в 3 раза больше, чем результат Льва в процентах. Число проголосовавших за Льва в 3 раза больше результата Медведя в процентах; число проголосовавших за Медведя в 3 раза больше результата Носорога в процентах. Наконец, число проголосовавших за Носорога в 3 раза больше результата Кабана в процентах. Сколько зверей проголосовало за Кабана? (*А. Чухнов*)

2. У Саши на калькуляторе всего четыре кнопки. С их помощью можно вычислять функции $x + 5$, x^3, $\sin x$, $\cos x$. Никаких других действий этот калькулятор делать не умеет. Изначально на экране горело число 2. Можно ли получить на экране число 3? (*А. Храбров*)

3. В прямоугольной таблице с 21 строками и 70 столбцами расставлены вещественные числа. Известно, что сумма чисел в каждой фигурке вида  равна 1 (при этом фигурка может быть как угодно повернута и перевернута). Найдите сумму чисел в нижней строке.
(*С. Берлов, А. Храбров, Д. Ростовский*)

4. Найдите все пары натуральных чисел p и q, для которых

$$p^3 - p^2q - 18p = 2q^2 - 3q + 1$$

и число p — простое. (*А. Солынин, А. Храбров, С. Берлов*)

5. Могут ли четыре диагонали параллелепипеда (не обязательно прямоугольного) иметь длины 2, 3, 5 и 11? (*Ф. Петров, А. Смирнов*)