



Комитет по образованию Санкт-Петербурга
Санкт-Петербургский государственный университет
Российский государственный педагогический университет
Санкт-Петербургский городской дворец творчества юных
СПб отделение математического института им. В.А.Стеклова

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

7 ДЕКАБРЯ 2013 Г.

I ТУР

6 КЛАСС

I ВАРИАНТ

1. Разрежьте клетчатый прямоугольник размерами 9×10 клеток на несколько квадратов так, чтобы среди них было ровно два квадрата с нечетной стороной. Разрезы должны идти по сторонам клеток.

2. Дана дробь $2/3$. Разрешается много раз выполнять следующие операции: прибавлять 2013 к числителю или прибавлять 2014 к знаменателю. Можно ли с помощью только этих операций получить дробь, равную $3/5$?

3. В ящике у Гарри Поттера 20 шариков — красных, белых и зеленых. Три из них — волшебные, они время от времени меняют цвет (на любой из этих трех). Однажды Гарри Поттер заглянул в ящик и увидел, что красных шариков больше, чем белых, а белых больше, чем зеленых. Заглянув через минуту, он увидел, что все стало наоборот: зеленых больше, чем белых, а белых больше, чем красных. Сколько белых шариков он увидел, когда заглядывал в ящик первый раз? Не забудьте обосновать свой ответ.

4. Джентльмены всегда говорят правду знакомым и лгут незнакомым. Собрались как-то 50 джентльменов и каждый сказал каждому из остальных какую-то из фраз: *У меня чётное число знакомых в этой компании* или *У меня нечётное число знакомых в этой компании*. Может ли так быть, что первая фраза была произнесена ровно 2013 раз?

Этот листок Вы можете оставить себе на память. В начале своей работы НЕ ЗАБУДЬТЕ указать о себе (БОЛЬШИМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ) следующие данные:

Фамилия, имя;

КЛАСС, ШКОЛА, РАЙОН ШКОЛЫ;

ДОМАШНИЙ АДРЕС ИЛИ ТЕЛЕФОН;

Фамилия, имя, отчество преподавателя математики в школе.

ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние.

Хотите ли Вы заниматься в кружке математики?

А если уже занимаетесь — Фамилия, имя, отчество преподавателя кружка математики, место занятий.

Списки прошедших на городской тур будут опубликованы на сайтах www.pdmi.ras.ru/~olymp и www.anichkov.ru/olimpus/matem



Комитет по образованию Санкт-Петербурга
Санкт-Петербургский государственный университет
Российский государственный педагогический университет
Санкт-Петербургский городской дворец творчества юных
СПб отделение математического института им. В.А.Стеклова

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

7 ДЕКАБРЯ 2013 Г.

I ТУР

6 КЛАСС

2 ВАРИАНТ

1. Разрежьте клетчатый прямоугольник размерами 10×11 клеток на несколько квадратов так, чтобы среди них было ровно два квадрата с нечетной стороной. Разрезы должны идти по сторонам клеток.

2. Дана дробь $2/5$. Разрешается много раз выполнять следующие операции: прибавлять 2014 к числителю или прибавлять 2013 к знаменателю. Можно ли с помощью только этих операций получить дробь, равную $2/3$?

3. В ящике у Гарри Поттера 25 шариков — красных, белых и зеленых. Три из них — волшебные, они время от времени меняют цвет (на любой из этих трех). Однажды Гарри Поттер заглянул в ящик и увидел, что белых шариков больше, чем зеленых, а зеленых больше, чем красных. Заглянув через минуту, он увидел, что все стало наоборот: красных больше, чем зеленых, а зеленых больше, чем белых. Сколько красных шариков он увидел, когда заглядывал в ящик первый раз? Не забудьте обосновать свой ответ.

4. Джентльмены всегда говорят правду знакомым и лгут незнакомым. Собрались как-то 60 джентльменов и каждый сказал каждому из остальных какую-то из фраз: *В этой компании четное число людей, мне незнакомых* или *В этой компании нечетное число людей, мне незнакомых*. Может ли так быть, что вторая фраза была произнесена ровно 2013 раз?

Этот листок Вы можете оставить себе на память. В начале своей работы НЕ ЗАБУДЬТЕ указать о себе (БОЛЬШИМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ) следующие данные:

Фамилия, имя;

КЛАСС, ШКОЛА, РАЙОН ШКОЛЫ;

ДОМАШНИЙ АДРЕС ИЛИ ТЕЛЕФОН;

Фамилия, имя, отчество преподавателя математики в школе.

ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние.

Хотите ли Вы заниматься в кружке математики?

А если уже занимаетесь — Фамилия, имя, отчество преподавателя кружка математики, место занятий.

Списки прошедших на городской тур будут опубликованы на сайтах www.pdmi.ras.ru/~olymp и www.anichkov.ru/olimpus/matem



Комитет по образованию Санкт-Петербурга
Санкт-Петербургский государственный университет
Российский государственный педагогический университет
Санкт-Петербургский городской дворец творчества юных
СПб отделение математического института им. В.А.Стеклова

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

7 ДЕКАБРЯ 2013 Г.

I ТУР

7 КЛАСС

1 ВАРИАНТ

1. Закрасьте несколько клеток таблицы 6×6 так, чтобы в каждой строке было ровно три закрашенных клетки, а в каждом столбце — либо одна, либо четыре.

2. Дана дробь $\frac{2}{3}$. За одну операцию можно либо прибавить 2013 к числителю имеющийся дроби, либо прибавить 2014 к знаменателю, либо сократить дробь на общий делитель числителя и знаменателя. Можно ли такими операциями получить дробь $\frac{3}{5}$?

3. В ящике у Гарри Поттера 100 шариков — красных, белых и зеленых. Три из них — волшебные, они время от времени меняют цвет (на любой из этих трех). Однажды Гарри Поттер заглянул в ящик и увидел, что красных шариков больше чем белых, а белых больше, чем зеленых. Заглянув через минуту, он увидел, что все стало наоборот: зеленых больше, чем белых, а белых больше, чем красных. Сколько белых шариков он увидел, когда заглядывал в ящик первый раз?

4. Клетчатый прямоугольник размерами 19×20 клеток разрезан на несколько квадратов (все разрезы идут по сторонам клеток). Какое наименьшее число квадратов с нечетной стороной может оказаться среди них?

Этот листок Вы можете оставить себе на память. В начале своей работы НЕ ЗАБУДЬТЕ указать о себе (БОЛЬШИМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ) следующие данные:

Фамилия, имя;

Класс, школа, район школы;

Домашний адрес или телефон;

Фамилия, имя, отчество преподавателя математики в школе.

ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние.

Хотите ли Вы заниматься в кружке математики?

А если уже занимаетесь — Фамилия, имя, отчество преподавателя кружка математики, место занятий.

Списки прошедших на городской тур будут опубликованы на сайтах www.pdmi.ras.ru/~olymp и www.anichkov.ru/olimpus/matem



Комитет по образованию Санкт-Петербурга
Санкт-Петербургский государственный университет
Российский государственный педагогический университет
Санкт-Петербургский городской дворец творчества юных
СПб отделение математического института им. В.А.Стеклова

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

7 ДЕКАБРЯ 2013 Г.

I ТУР

7 КЛАСС

2 ВАРИАНТ

1. Закрасьте несколько клеток таблицы 6×6 так, чтобы в каждой строке было ровно две закрашенных клетки, а в каждом столбце — либо одна, либо четыре.

2. Дана дробь $\frac{4}{7}$. За одну операцию можно либо прибавить 2013 к числителю имеющийся дроби, либо прибавить 2014 к знаменателю, либо сократить дробь на общий делитель числителя и знаменателя. Можно ли такими операциями получить дробь $\frac{6}{11}$?

3. В ящике у Гарри Поттера 50 шариков — красных, белых и зеленых. Три из них — волшебные, они время от времени меняют цвет (на любой из этих трех). Однажды Гарри Поттер заглянул в ящик и увидел, что белых шариков больше чем зеленых, а зеленых больше, чем красных. Заглянув через минуту, он увидел, что все стало наоборот: красных больше, чем зеленых, а зеленых больше, чем белых. Сколько белых шариков он увидел, когда заглядывал в ящик первый раз?

4. Клетчатый прямоугольник размерами 20×21 клеток разрезан на несколько квадратов (все разрезы идут по сторонам клеток). Какое наименьшее число квадратов с нечетной стороной может оказаться среди них?

Этот листок Вы можете оставить себе на память. В начале своей работы НЕ ЗАБУДЬТЕ указать о себе (БОЛЬШИМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ) следующие данные:

Фамилия, имя;

Класс, школа, район школы;

Домашний адрес или телефон;

Фамилия, имя, отчество преподавателя математики в школе.

ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние.

Хотите ли Вы заниматься в кружке математики?

А если уже занимаетесь — Фамилия, имя, отчество преподавателя кружка математики, место занятий.

Списки прошедших на городской тур будут опубликованы на сайтах www.pdmi.ras.ru/~olymp и www.anichkov.ru/olimpus/matem



Комитет по образованию Санкт-Петербурга
Санкт-Петербургский государственный университет
Российский государственный педагогический университет
Санкт-Петербургский городской дворец творчества юных
СПб отделение математического института им. В.А.Стеклова

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

7 ДЕКАБРЯ 2013 г. I тур 8 КЛАСС 1 ВАРИАНТ

1. Дана дробь $2/3$. Разрешается много раз выполнять следующие операции: прибавлять 2013 к числителю или прибавлять 2014 к знаменателю. Можно ли с помощью только этих операций получить дробь, равную $3/5$?

2. Клетчатый прямоугольник 629×630 разрезан на несколько квадратов (все разрезы идут по линиям сетки). Какое наименьшее число квадратов с нечетной стороной может оказаться в таком разбиении? Не забудьте объяснить, почему в разбиении не может получиться меньшее число квадратов с нечетной стороной.

3. Сумасшедший конструктор создал часы с 150 стрелками. Первая стрелка крутится со скоростью один оборот в час, вторая делает 2 оборота в час, ..., 150-я стрелка делает 150 оборотов в час. Часы запустили из положения, когда все стрелки смотрели строго вверх. Когда в процессе работы часов встречаются две или более стрелки, эти стрелки немедленно отваливаются. Через какое время после запуска отвалится стрелка, вращающаяся со скоростью 74 оборота в час?

4. На выборах в Солнечном Городе можно было проголосовать за Винтика, Шпунтика или Кнопочку. После оглашения результатов оказалось, что все кандидаты набрали в сумме 146% голосов. Считавший голоса Незнайка объяснил, что по ошибке подсчитал процент голосов за Винтика не от общего числа проголосовавших, а лишь от числа голосовавших за Винтика или Шпунтика (остальные проценты он подсчитал правильно). Известно, что за Шпунтика проголосовало больше 1 000 избирателей. Докажите, что Винтик набрал больше 850 голосов.

5. Диагонали AD и BE выпуклого пятиугольника $ABCDE$ пересекаются в точке P . Известно, что $AC = CE = AE$, $\angle APB = \angle ACE$ и $AB + BC = CD + DE$. Докажите, что $AD = BE$.

Этот листок Вы можете оставить себе на память. В начале своей работы НЕ ЗАБУДЬТЕ указать о себе следующие данные:

ФАМИЛИЯ, ИМЯ;
КЛАСС, ШКОЛА, РАЙОН ШКОЛЫ;
ДОМАШНИЙ АДРЕС ИЛИ ТЕЛЕФОН;
ФАМИЛИЯ, ИМЯ, ОТЧЕСТВО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛЕ.
ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние.
ХОТИТЕ ЛИ ВЫ ЗАНИМАТЬСЯ В КРУЖКЕ МАТЕМАТИКИ?
А если уже занимаетесь — ФАМИЛИЯ, ИМЯ, ОТЧЕСТВО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ
КРУЖКА МАТЕМАТИКИ, МЕСТО ЗАНЯТИЙ.
Списки прошедших на городской тур будут опубликованы на сайтах
www.pdmi.ras.ru/~olymp и www.anichkov.ru/olimpus/matem



Комитет по образованию Санкт-Петербурга
Санкт-Петербургский государственный университет
Российский государственный педагогический университет
Санкт-Петербургский городской дворец творчества юных
СПб отделение математического института им. В.А.Стеклова

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

7 ДЕКАБРЯ 2013 г. I тур 8 КЛАСС 2 ВАРИАНТ

1. Дана дробь $4/7$. Разрешается много раз выполнять следующие операции: прибавлять 2013 к числителю или прибавлять 2014 к знаменателю. Можно ли с помощью только этих операций получить дробь, равную $3/5$?

2. Клетчатый прямоугольник 570×571 разрезан на несколько квадратов (все разрезы идут по линиям сетки). Какое наименьшее число квадратов с нечетной стороной может оказаться в таком разбиении? Не забудьте объяснить, почему в разбиении не может получиться меньшее число квадратов с нечетной стороной.

3. Сумасшедший конструктор создал часы со 100 стрелками. Первая стрелка крутится со скоростью один оборот в час, вторая делает 2 оборота в час, ..., 100-я стрелка делает 100 оборотов в час. Часы запустили из положения, когда все стрелки смотрели строго вниз. Когда в процессе работы часов встречаются две или более стрелки, эти стрелки немедленно отваливаются. Через какое время после запуска отвалится стрелка, вращающаяся со скоростью 48 оборотов в час?

4. На выборах в Стране Дураков можно было проголосовать за лису Алису, кота Базилио или Карабаса Барабаса. После оглашения результатов оказалось, что все кандидаты в сумме набрали 146% голосов. Считавший голоса Буратино объяснил, что по ошибке вычислил процент голосов за Алису не от общего числа проголосовавших, а лишь от числа голосовавших за Алису или Базилио (остальные проценты он подсчитал правильно). Известно, что за Базилио проголосовало больше 2 000 избирателей. Докажите, что Алиса набрала более 1 700 голосов.

5. Диагонали AC и BE выпуклого пятиугольника $ABCDE$ пересекаются в точке O . Известно, что $AD = BD$, $\angle BDA = \angle BOC = 60^\circ$ и $CD + BC = AE + DE$. Докажите, что $AC = BE$.

Этот листок Вы можете оставить себе на память. В начале своей работы НЕ ЗАБУДЬТЕ указать о себе следующие данные:

ФАМИЛИЯ, ИМЯ;
КЛАСС, ШКОЛА, РАЙОН ШКОЛЫ;
ДОМАШНИЙ АДРЕС ИЛИ ТЕЛЕФОН;
ФАМИЛИЯ, ИМЯ, ОТЧЕСТВО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛЕ.
ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние.
ХОТИТЕ ЛИ ВЫ ЗАНИМАТЬСЯ В КРУЖКЕ МАТЕМАТИКИ?
А если уже занимаетесь — ФАМИЛИЯ, ИМЯ, ОТЧЕСТВО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ
КРУЖКА МАТЕМАТИКИ, МЕСТО ЗАНЯТИЙ.
Списки прошедших на городской тур будут опубликованы на сайтах
www.pdmi.ras.ru/~olymp и www.anichkov.ru/olimpus/matem



Комитет по образованию Санкт-Петербурга
Санкт-Петербургский государственный университет
Российский государственный педагогический университет
Санкт-Петербургский городской дворец творчества юных
СПб отделение математического института им. В.А.Стеклова

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

7 ДЕКАБРЯ 2013 Г.

I ТУР

9 КЛАСС

I ВАРИАНТ

1. В ящике у Васи 400 шариков — красных, белых и зеленых. Три из них — волшебные и могут в любой момент поменять цвет на любой из трех перечисленных выше. Вася заглянул в ящик и увидел, что красных шариков больше чем белых, а белых больше, чем зеленых. Через минуту Вася еще раз заглянул в ящик и оказалось, что теперь красных шариков меньше чем белых, а белых меньше, чем зеленых. Сколько белых шариков он увидел в первый раз?

2. Даны числа a_1, \dots, a_{10} . Известно, что у каждого из десяти квадратных трехчленов

$$x^2 - a_1x + a_2, \quad x^2 - a_2x + a_3, \quad \dots, \quad x^2 - a_9x + a_{10}, \quad x^2 - a_{10}x + a_1$$

не больше одного корня. Докажите, что все числа a_i не превосходят 4.

3. Клетчатый прямоугольник 2013×2014 разрезан на несколько квадратов (все разрезы идут по линиям сетки). Какое наименьшее число квадратов с нечетной стороной может оказаться среди них?

4. Дан вписанный пятиугольник $ABCDE$. Известно, что $AC = CD$. Докажите, что если $ABCE$ — трапеция, то и $BCDE$ — трапеция или прямоугольник.

5. Квадрат натурального числа даёт при делении на n остаток 8, а куб того же числа даёт при делении на n остаток 25. Чему может быть равно n ?

Этот листок Вы можете оставить себе на память. В начале своей работы НЕ ЗАБУДЬТЕ указать о себе (БОЛЬШИМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ) следующие данные:

Фамилия, имя;

КЛАСС, школа, район школы;

ДОМАШНИЙ АДРЕС или ТЕЛЕФОН;

Фамилия, имя, отчество ПРЕПОДАВАТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ в школе.

ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние.

Если Вы занимаетесь в кружке математики —

ФИО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ КРУЖКА, МЕСТО ЗАНЯТИЙ.

Списки прошедших на городской тур будут опубликованы на сайтах

www.pdmi.ras.ru/~olymp и www.anichkov.ru/olimpus/matem



Комитет по образованию Санкт-Петербурга
Санкт-Петербургский государственный университет
Российский государственный педагогический университет
Санкт-Петербургский городской дворец творчества юных
СПб отделение математического института им. В.А.Стеклова

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

7 ДЕКАБРЯ 2013 Г.

I ТУР

9 КЛАСС

2 ВАРИАНТ

1. В ящике у Пети 200 шариков — синих, желтых и черных. Три из них — волшебные и могут в любой момент поменять цвет на любой из трех перечисленных выше. Петя заглянул в ящик и увидел, что синих шариков больше чем желтых, а желтых больше, чем черных. Через минуту Петя еще раз заглянул в ящик и оказалось, что теперь синих шариков меньше чем желтых, а желтых меньше, чем черных. Сколько желтых шариков он увидел в первый раз?

2. Даны числа a_1, \dots, a_8 . Известно, что у каждого из восьми квадратных трехчленов

$$x^2 + a_2x + a_1, \quad x^2 + a_3x + a_2, \quad \dots, \quad x^2 + a_8x + a_7, \quad x^2 + a_1x + a_8$$

не больше одного корня. Докажите, что все числа a_i не превосходят 4.

3. Клетчатый прямоугольник 2014×2015 разрезан на несколько квадратов (все разрезы идут по линиям сетки). Какое наименьшее число квадратов с нечетной стороной может оказаться среди них?

4. Дан вписанный пятиугольник $ABCDE$. Известно, что $BE = DE$. Докажите, что если $ABCE$ — трапеция, то и $ACDE$ — трапеция или прямоугольник.

5. Квадрат натурального числа даёт при делении на n остаток 10, а куб того же числа даёт при делении на n остаток 33. Чему может быть равно n ?

Этот листок Вы можете оставить себе на память. В начале своей работы НЕ ЗАБУДЬТЕ указать о себе (БОЛЬШИМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ) следующие данные:

Фамилия, имя;

КЛАСС, школа, район школы;

ДОМАШНИЙ АДРЕС или ТЕЛЕФОН;

Фамилия, имя, отчество ПРЕПОДАВАТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ в школе.

ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние.

Если Вы занимаетесь в кружке математики —

ФИО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ КРУЖКА, МЕСТО ЗАНЯТИЙ.

Списки прошедших на городской тур будут опубликованы на сайтах

www.pdmi.ras.ru/~olymp и www.anichkov.ru/olimpus/matem



Комитет по образованию Санкт-Петербурга
Санкт-Петербургский государственный университет
Российский государственный педагогический университет
Санкт-Петербургский городской дворец творчества юных
СПб отделение математического института им. В.А.Стеклова

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

7 ДЕКАБРЯ 2013 г. I тур 10 КЛАСС 1 ВАРИАНТ

1. В ящике у Васи 100 шариков — красных, белых и зеленых. Три из них — волшебные и могут в любой момент поменять цвет на любой из трех перечисленных выше. Вася заглянул в ящик и увидел, что красных шариков больше чем белых, а белых больше, чем зеленых. Через минуту Вася еще раз заглянул в ящик и оказалось, что теперь красных шариков меньше чем белых, а белых меньше, чем зеленых. Сколько белых шариков он увидел в первый раз?

2. Натуральные числа от 1 до 2014 выписаны по кругу в некотором порядке. Отличница Маша вычислила наибольшие общие делители у всех пар стоящих рядом чисел и заявила, что среди полученных НОДов ровно 1007 четных. Докажите, что она ошиблась.

3. Дан квадратный трехчлен $x^2 - ax + b$, имеющий два ненулевых корня. Известно, что $|b + 1| < a$, и один из его корней по модулю меньше 1. Докажите, что другой корень по модулю больше 1.

4. На стороне AB треугольника ABC выбрана точка D , для которой $AC = CD$. На дуге BC описанной окружности треугольника BDC (не содержащей точки D) выбрана точка E , для которой $\angle ACB = \angle ABE$. На продолжении отрезка BC за точку C отмечена точка F , такая что $CE = CF$. Докажите, что $AB = AF$.

5. Клетчатый прямоугольник $n \times (n + 3)$, где $n > 10$, разрезан на несколько квадратов (все разрезы идут по линиям сетки). Какое наименьшее число квадратов с нечетной стороной может оказаться в таком разбиении? (Ответ может зависеть от n .)

Этот листок Вы можете оставить себе на память. В начале своей работы НЕ ЗАБУДЬТЕ указать о себе (БОЛЬШИМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ) следующие данные:

Фамилия, имя;

КЛАСС, ШКОЛА, РАЙОН ШКОЛЫ;

ДОМАШНИЙ АДРЕС ИЛИ ТЕЛЕФОН;

Фамилия, имя, отчество преподавателя математики в школе.

ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние.

Если Вы занимаетесь в кружке математики —

ФИО преподавателя кружка, место занятий.

Списки прошедших на городской тур будут опубликованы на сайтах

www.pdmi.ras.ru/~olymp и www.anichkov.ru/olimpus/matem



Комитет по образованию Санкт-Петербурга
Санкт-Петербургский государственный университет
Российский государственный педагогический университет
Санкт-Петербургский городской дворец творчества юных
СПб отделение математического института им. В.А.Стеклова

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

7 ДЕКАБРЯ 2013 г. I тур 10 КЛАСС 2 ВАРИАНТ

1. В ящике у Пети 200 шариков — серых, бурых и малиновых. Три из них — волшебные и могут в любой момент поменять цвет на любой из трех перечисленных выше. Петя заглянул в ящик и увидел, что серых шариков больше чем бурых, а бурых больше, чем малиновых. Через минуту Петя еще раз заглянул в ящик и оказалось, что теперь серых шариков меньше чем бурых, а бурых меньше, чем малиновых. Сколько бурых шариков он увидел в первый раз?

2. Натуральные числа от 1 до 2014 выписаны по кругу в некотором порядке. Отличница Таня вычислила наименьшие общие кратные у всех пар стоящих рядом чисел и заявила, что среди полученных НОКов ровно 1007 нечетных. Докажите, что она ошиблась.

3. Дан квадратный трехчлен $x^2 + ax - b$, имеющий два ненулевых корня. Известно, что $|b - 1| < a$, и один из его корней по модулю меньше 1. Докажите, что другой корень по модулю больше 1.

4. На продолжении диагонали AC вписанного четырехугольника $ABCD$ за точку C выбрана точка E , такая что $BC = CE$. На продолжении стороны AD за точку D выбрана точка F , такая что $\angle ACF = \angle BAD$ и $CD = CF$. Докажите, что $AF = FE$.

5. Клетчатый прямоугольник $m \times (m + 5)$, где $m > 10$, разрезан на несколько квадратов (все разрезы идут по линиям сетки). Какое наименьшее число квадратов с нечетной стороной может оказаться в таком разбиении? (Ответ может зависеть от m .)

Этот листок Вы можете оставить себе на память. В начале своей работы НЕ ЗАБУДЬТЕ указать о себе (БОЛЬШИМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ) следующие данные:

Фамилия, имя;

КЛАСС, ШКОЛА, РАЙОН ШКОЛЫ;

ДОМАШНИЙ АДРЕС ИЛИ ТЕЛЕФОН;

Фамилия, имя, отчество преподавателя математики в школе.

ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние.

Если Вы занимаетесь в кружке математики —

ФИО преподавателя кружка, место занятий.

Списки прошедших на городской тур будут опубликованы на сайтах

www.pdmi.ras.ru/~olymp и www.anichkov.ru/olimpus/matem



Комитет по образованию Санкт-Петербурга
Санкт-Петербургский государственный университет
Российский государственный педагогический университет
Санкт-Петербургский городской дворец творчества юных
СПб отделение математического института им. В.А.Стеклова

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

7 ДЕКАБРЯ 2013 Г. I ТУР 11 КЛАСС 1 ВАРИАНТ

1. Двоечнику Косте накануне ЕГЭ приснилось правило:

$$\lg\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\lg a}{\lg b}.$$

При каких $a > 1$ это правило не работает ни при каком положительном b ?

2. Саша отметил несколько клеток таблицы 8×13 так, что в любом квадрате 2×2 оказалось нечетное число отмеченных клеток. Затем он отметил еще несколько клеток, в результате чего в каждом квадрате 2×2 стало четное число отмеченных клеток. Какое наименьшее суммарное число клеток могло быть отмечено Сашей?

3. Дан квадратный трехчлен $f(x)$, старший коэффициент которого равен -1 . Известно, что существует такая пара различных чисел u и v , что $f(u) = -v^2$ и $f(v) = -u^2$. Докажите, что существует бесконечно много пар чисел с таким свойством.

4. Все грани тетраэдра $ABCD$ — остроугольные треугольники. Точка I — центр его вписанной сферы, а точка O — центр описанной сферы. Известно, что I лежит в плоскости ABO . Кроме того, известно, что $\angle ABC = 50^\circ$ и $\angle BAC = 60^\circ$. Найдите угол ADB .

5. Докажите, что для всех натуральных m и n выполнено неравенство

$$[n\sqrt{2}] \cdot [m\sqrt{7}] < [mn\sqrt{14}].$$

Квадратные скобки обозначают целую часть числа.

Этот листок Вы можете оставить себе на память. В начале своей работы НЕ ЗАБУДЬТЕ указать о себе (БОЛЬШИМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ) следующие данные:

Фамилия, имя;

КЛАСС, ШКОЛА, РАЙОН ШКОЛЫ;

ДОМАШНИЙ АДРЕС ИЛИ ТЕЛЕФОН;

ФАМИЛИЯ, ИМЯ, ОТЧЕСТВО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛЕ.

ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние.

Если Вы занимаетесь в кружке математики —

ФИО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ КРУЖКА, МЕСТО ЗАНЯТИЙ.

Списки прошедших на городской тур будут опубликованы на сайтах

www.pdmi.ras.ru/~olymp и www.anichkov.ru/olimpus/matem



Комитет по образованию Санкт-Петербурга
Санкт-Петербургский государственный университет
Российский государственный педагогический университет
Санкт-Петербургский городской дворец творчества юных
СПб отделение математического института им. В.А.Стеклова

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

7 ДЕКАБРЯ 2013 Г. I ТУР 11 КЛАСС 2 ВАРИАНТ

1. Двоечнику Косте накануне ЕГЭ приснилось правило:

$$\lg\left(\frac{a^4}{b}\right) = \frac{\lg^4 a}{\lg b}.$$

При каких $a > 1$ это правило работает хотя бы при одном b ?

2. Сережа отметил несколько клеток таблицы 12×9 так, что в любом квадрате 2×2 оказалось нечетное число отмеченных клеток. Затем он отметил еще несколько клеток, в результате чего в каждом квадрате 2×2 стало четное число отмеченных клеток. Какое наименьшее суммарное число клеток могло быть отмечено Сережей?

3. Дан квадратный трехчлен $f(x)$, старший коэффициент которого равен 1. Известно, что существует такая пара различных чисел u и v , что $f(u) = v^2$ и $f(v) = u^2$. Докажите, что существует бесконечно много пар чисел с таким свойством.

4. Все грани тетраэдра $ABCD$ — остроугольные треугольники. Точка I — центр его вписанной сферы, а точка O — центр описанной сферы. Известно, что I лежит в плоскости BCO . Кроме того, известно, что $\angle ACB = 70^\circ$ и $\angle ABC = 80^\circ$. Найдите угол BDC .

5. Докажите, что для всех натуральных m и n выполнено неравенство

$$[n\sqrt{3}] \cdot [m\sqrt{5}] < [mn\sqrt{15}].$$

Квадратные скобки обозначают целую часть числа.

Этот листок Вы можете оставить себе на память. В начале своей работы НЕ ЗАБУДЬТЕ указать о себе (БОЛЬШИМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ) следующие данные:

Фамилия, имя;

КЛАСС, ШКОЛА, РАЙОН ШКОЛЫ;

ДОМАШНИЙ АДРЕС ИЛИ ТЕЛЕФОН;

ФАМИЛИЯ, ИМЯ, ОТЧЕСТВО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛЕ.

ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние.

Если Вы занимаетесь в кружке математики —

ФИО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ КРУЖКА, МЕСТО ЗАНЯТИЙ.

Списки прошедших на городской тур будут опубликованы на сайтах

www.pdmi.ras.ru/~olymp и www.anichkov.ru/olimpus/matem