

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2014 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
II ТУР. 9 КЛАСС.

1. Квадратный трехчлен $f(x)$ переставляет местами различные числа a и b (т. е. $f(a) = b$ и $f(b) = a$). Докажите, что он не переставляет местами никакие другие два числа.

2. Остроугольный треугольник ABC , все углы которого больше 30° , вписан в окружность с центром O и радиусом R . Точка K — проекция O на биссектрису угла B , точка M — середина стороны AC . Оказалось, что $2KM = R$. Найдите угол B . (С. Берлов)

3. 100 депутатов образовали 450 комиссий. Каждые две комиссии пересекаются не более чем под трем депутатам, а каждые 5 — не более чем по одному. Докажите, что есть четыре комиссии, пересекающиеся ровно по одному депутату. (А. Голованов)

4. Назовём натуральное число *почтенным*, если сумма всех его делителей, включая 1, но не включая само число, на 1 меньше этого числа. Найдите все почтенные числа, некоторая точная степень которых тоже почтенна. (А. Голованов)

.....

Олимпиада 2014 года. II тур. 9 класс. Выводная аудитория.

5. На клетчатую плоскость со стороной клетки, равной 1, произвольным образом брошена салфетка 100×100 . Она накрывает некоторые узлы (узел, лежащий на границе салфетки, тоже считается накрытым). Каким наименьшим числом прямых (идущих не обязательно по линиям сетки) заведомо можно покрыть все эти узлы? (А. Голованов)

6. На данной окружности зафиксированы точки A и B . Точки C и D движутся по одной из дуг AB так, что отрезок CD имеет постоянную длину. Точки I_1 и I_2 — центры вписанных окружностей треугольников ABC и ABD . Докажите, что прямая I_1I_2 все время касается некоторой фиксированной окружности. (С. Берлов)

7. Натуральные числа a , b и c попарно взаимно просты. В бесконечной клетчатой таблице расставлены целые числа так, что сумма чисел в любом квадрате $a \times a$ четна, в любом квадрате $b \times b$ четна и в любом квадрате $c \times c$ тоже четна. Верно ли, что для любых a , b , c такая ситуация возможна, только если все числа в таблице четные? (А. Храбров)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2014 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
II ТУР. 10 КЛАСС.

1. Квадратный трехчлен $f(x)$ переставляет местами различные числа a и b (т.е. $f(a) = b$ и $f(b) = a$). Докажите, что он не переставляет местами никакие другие два числа.

2. На двух параллельных прямых отмечено по 40 точек. Их разбивают на 40 пар так, чтобы отрезки, соединяющие точки в одной паре, не пересекались друг с другом. (В частности, конец одного из отрезков не может лежать на другом отрезке.) Докажите, что число способов это сделать меньше чем 3^{39} . (Н. Филонов)

3. Внутри треугольника ABC отмечена точка D , а на отрезке BD — точка E так, что $BD = CE$. Оказалось, что $\angle ABD = \angle ECD = 10^\circ$, $\angle BAD = 40^\circ$ и $\angle CED = 60^\circ$. Докажите, что $AB > AC$. (А. Пастор)

4. Набор положительных чисел $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{100n}$ обладает следующим свойством: если из этого набора выбрать любые $2n + 1$ чисел, то сумма n наибольших из выбранных чисел будет больше суммы оставшихся $n + 1$ чисел. Докажите, что

$$(n + 1)(a_1 + a_2 + \dots + a_n) > a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{100n}.$$

(С. Берлов)

.....

Олимпиада 2014 года. II тур. 10 класс. Выводная аудитория.

5. Вписанная окружность ω треугольника ABC касается стороны AC в точке B_1 . На окружности ω отмечены точки E и F , такие что $\angle AEB_1 = \angle B_1FC = 90^\circ$. Касательные к окружности ω в точках E и F пересекаются в точке D , причем точки B и D лежат по разные стороны от прямой AC . Точка M — середина стороны AC . Докажите, что прямые AE , CF и DM пересекаются в одной точке. (А. Смирнов)

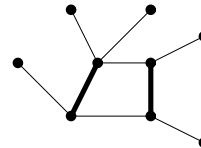
6. Дано бесконечное множество натуральных чисел M . Известно, что для любых двух различных чисел $a, b \in M$ в множестве M также содержится хотя бы одно из чисел $a^b - 2$ и $a^b + 2$. Докажите, что в M содержится хотя бы одно составное число.

7. Некоторые города Тринадцатого царства соединены дорогами с односторонним движением. Известно, что любой замкнутый циклический маршрут по дорогам этой страны, не нарушающий правил дорожного движения, проходит по четному числу дорог. Докажите, что царь сможет разместить в некоторых городах военные базы так, чтобы между этими городами не было дорог, но в любой город, где нет базы, можно было добраться из города, где база есть, проехав ровно одну дорогу. (сообщил Н. Гравин)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2014 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
II ТУР. 11 КЛАСС.

1. Обозначим через $f(x)$ функцию, которая равна 1 при любом целом x , и равна 0 при остальных x . Учительница дала задание двоечнику Васе записать функцию $f(x)$ с помощью букв x , целых чисел, знаков сложения, вычитания, умножения, деления и операции взятия целой части. Помогите Васе.

2. В стране некоторые пары городов соединены дорогами, причем из каждого города выходит не более 100 дорог. Набор дорог называется *идеальным*, если эти дороги не имеют общих концов, но больше ни одной дороги с сохранением этого условия добавить к этому набору нельзя. (На рисунке выделены две дороги, образующие идеальный набор.) Министерство транспорта каждый день выбирает какой-нибудь идеальный набор дорог и полностью разрушает их. Новых дорог министерство не строит. Докажите, что не более чем через 199 таких операций в стране вообще не останется дорог. (С. Берлов)



3. Дано натуральное число N . На доске написаны числа от N^3 до $N^3 + N$. Среди них a чисел покрасили в красный цвет, а какие-то b из остальных — в синий. Оказалось, что сумма красных чисел делится на сумму синих. Докажите, что a делится на b .

4. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки C_1 и B_1 соответственно, отрезок B_1C_1 параллелен BC . Окружность, проходящая через A , B и B_1 , пересекает отрезок CC_1 в точке L . Известно, что описанная окружность треугольника CLB_1 касается прямой AL . Докажите, что $AL \leq (AC + AC_1)/2$. (С. Берлов)

.....
Олимпиада 2014 года. II тур. 11 класс. Выводная аудитория.

5. Дано бесконечное множество M натуральных чисел. Для любых двух различных его элементов a и b в множестве M также лежит хотя бы одно из чисел $a^b - 2$ и $a^b + 2$. Докажите, что в M содержится хотя бы одно составное число.

6. В каждой клетке квадрата $n \times n$ стоит ребенок. Каждый из них смотрит в сторону одной из соседних по стороне клеток (никто не смотрит за пределы квадрата) и видит либо ухо, либо затылок ребенка, стоящего в этой клетке. Какое наименьшее число детей может видеть ухо? (К. Кохась, А. Храбров)

7. Точка M — середина дуги BAC описанной окружности треугольника ABC , I — центр его вписанной окружности, L — основание биссектрисы AL . Прямая MI пересекает описанную окружность в точке K . Описанная окружность треугольника AKL пересекает прямую BC вторично в точке P . Докажите, что $\angle AIP = 90^\circ$.