САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2014 года ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 6 класс.

1. Для записи дроби, у которой числитель и/или знаменатель сами являются дробями, будем использовать дробные черточки разных размеров. При этом вычисление начинается с самой маленькой дробной черты и заканчивается самой большой, например, $\dfrac{1}{\frac{\frac{4}{5}}{3}} = \dfrac{15}{4}$. По вертикали сверху вниз выписаны числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (именно в таком порядке). Расставьте между ними 8 горизонтальных черточек (все черточки разной длины), чтобы полученная сложная дробь была равна $\frac{7}{10}$.

(*К. Кохась*)

2. На доске 10×20 несколько клеток покрашено в синий цвет. Костя разрезал доску по клеточкам на прямоугольники так, что в каждом оказалось 5 синих клеток. А Влад разрезал такую же доску на прямоугольники так, что в каждом оказалось 7 синих клеток. Докажите, что Дима не сможет разрезать такую доску на прямоугольники так, что в каждом будет 6 синих клеток. (*К. Кохась*)

3. В примере на сложение цифры заменили буквами (причем разные цифры — разными буквами). Оказалось, что число

$$\text{КРЯКВА} + \text{КРЯ} + \text{КРЯ}$$

делится на 167. Докажите, что тогда число $\text{КВАКРЯ} + \text{КВА} + \text{КВА}$ не делится на 167.

(*А. Солынин*)

4. 78 человек разного возраста играли в теннис. Всего было сыграно 310 партий. (Каждый с каждым сыграл не более одной партии, ничьих в теннисе не бывает.) Докажите, что найдутся 4 человека, среди которых самый старший или самый младший выиграл у остальных трех. (*М. Антипов*)

. . . .

Олимпиада 2014 года. II тур. 6 класс. Выводная аудитория.

5. Есть 50 карточек, на них написаны числа от 1 до 50, каждое по одному разу. Костя и Виталик по очереди берут по одной карточке. Костя берет первым и хочет добиться того, чтобы сумма чисел на его карточках делилась на 25. Виталик хочет этому помешать. Сможет ли Костя добиться своей цели? (*В. Аксенов*)

6. Шахматная фигура Бадья занимает квадратик 2×2. За один ход Бадья может продвинуться на любое число клеток по горизонтали или на любое число клеток по вертикали, если только все клетки, по которым она проходит, свободны. Одна Бадья бьет другую, если может за один ход встать в точности на ее место. Докажите, что в прямоугольнике 30×40 нельзя расставить больше 240 Бадей так, чтобы они не били друг друга.

(*В. Франк*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2014 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
II ТУР. 7 КЛАСС.

1. Дано десять различных целых чисел. Для каждых двух чисел подсчитали их разность (большее минус меньшее). Среди этих разностей оказалось ровно 44 различных. Докажите, что одно из исходных десяти чисел равно полусумме двух других. (*Ф. Петров*)

2. Можно ли в клетках таблицы 100×101 расставить различные натуральные числа так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце наибольшее число было равно сумме остальных? (*Д. Максимов*)

3. Несколько человек разного возраста сыграли несколько партий в настольный теннис. Каждый игрок сыграл по одной партии с четырьмя другими игроками, ничьих в настольном теннисе не бывает. Докажите, что либо найдется игрок, выигравший хотя бы у двух соперников старше его, либо найдется игрок, выигравший хотя бы у двух соперников младше его. (*М. Антипов*)

4. На 1000 карточках написаны числа от 1 до 1000, каждое по одному разу. Костя и Виталик по очереди берут по одной карточке. Костя берет первым и хочет добиться того, чтобы сумма чисел на его карточках делилась на 25. Виталик хочет этому помешать. Сможет ли Костя добиться своей цели? (*В. Аксенов*)

. . . .

Олимпиада 2014 года. II тур. 7 класс. Выводная аудитория.

5. Найдите все простые числа p, q и r, такие что число

$$p^4 + q^4 + r^4 - 3$$

тоже простое. (*Ф. Петров*)

6. Клетчатый прямоугольник раскрашен в шахматном порядке. Некоторые его клетки отмечены крестиком, причем вместе с любой отмеченной клеткой отмечены и все клетки той же строки, расположенные левее, а также все клетки в том же столбце, расположенные ниже (а также все клетки, находящиеся одновременно ниже и левее). Оказалось, что среди отмеченных клеток поровну черных и белых. Докажите, что фигуру, образованную отмеченными клетками, можно разрезать на прямоугольники 1×2. Фигура такого вида называется диаграммой Юнга. (*Ф. Петров*)

7. Внутри остроугольного треугольника ABC с наибольшей стороной BC взята точка P. На сторонах AC и CB выбраны точки X и Y соответственно таким образом, что прямая PX параллельна AB, а прямая PY параллельна AC. Прямая CP пересекает сторону AB в точке Z. Докажите, что $XY + PZ < BC$. (*С. Берлов*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2014 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 8 класс.

1. Дано десять различных целых чисел. Для каждых двух чисел подсчитали их разность (большее минус меньшее). Среди этих разностей оказалось ровно 44 различных. Докажите, что одно из исходных десяти чисел равно полусумме двух других. (*Ф. Петров*)

2. В турнире по поддавкам было 2013 участников (каждый с каждым сыграл одну партию). Оказалось, что каждый игрок сыграл 1006 партий черными и 1006 — белыми. Ничьих на турнире не было. После турнира с каждого игрока взяли плату за участие, равную произведению числа партий, которые игрок проиграл, играя белыми, и числа партий, которые он проиграл чёрными. Кроме того, каждому игроку дали премию, равную произведению числа его выигрышей белыми и числа его выигрышей черными. Докажите, что суммарная плата всех игроков за участие в точности равна всему премиальному фонду. (*А. Солынин*)

3. На стороне AD выпуклого четырехугольника $ABCD$ выбрана точка E, для которой $AB < BE$. Кроме того, $AC > CD$. Докажите, что $ED < 2BC$. (*А. Смирнов, Ф. Петров*)

4. Найдите все четверки простых чисел p, q, r, s, для которых

$$p^4 + q^4 + r^4 + 14 = s^2.$$

(*Ф. Петров*)

. . . .

Олимпиада 2014 года. II тур. 8 класс. Выводная аудитория.

5. Клетчатый прямоугольник раскрашен в шахматном порядке. Некоторые его клетки отмечены крестиком, причем вместе с любой отмеченной клеткой отмечены и все клетки той же строки, расположенные левее, а также все клетки в том же столбце, расположенные ниже (а также все клетки, находящиеся одновременно ниже и левее). Оказалось, что среди отмеченных клеток поровну черных и белых. Докажите, что фигуру, образованную отмеченными клетками, можно разрезать на прямоугольники 1×2. Фигура такого вида называется диаграммой Юнга. (*Ф. Петров*)

6. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) диагонали пересекаются в точке O, $CO = CD$, $\angle BAC = \angle CBD$. Точка K на диагонали AC такова, что $AK = CO$. Докажите, что $\angle ABK = \angle CDB$. (*А. Смирнов, Ф. Петров*)

7. На доске написаны три положительных числа. Разрешается стереть одно из них (скажем, z) и заменить на $1/(zx + zy)$, где x, y — два других числа на доске. Можно ли из набора 2, 3, 6 получить набор чисел 2, 3, 4? (*Ф. Петров*)