САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2012 года ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 6 класс.

---

1. Выберите 24 клетки в прямоугольнике 5×8 и проведите в каждой выбранной клетке одну из диагоналей так, чтобы никакие две проведенные диагонали не имели общих концов.

2. Вдоль прямой дороги живут пятеро друзей: Алик, Боря, Вася, Гриша и Дима, домá которых стоят в алфавитном порядке. Боря подсчитал сумму расстояний от своего дома до домов четырех своих друзей и получил 20 км. Вася же вычислил, что сумма расстояний от его дома до домов его четырех друзей равна 18 км. На каком расстоянии от Бори живет Вася? (*А. Голованов*)

3. Натуральное число назовем *хорошим*, если оно делится на двузначное число, образованное его первыми двумя цифрами. Например, число 1365 — хорошее, так как делится на 13. На доске выписано 98 последовательных восьмизначных чисел. Оказалось, что среди них нет ни одного хорошего. Какой может быть вторая цифра наибольшего из выписанных чисел? (Найдите все варианты ответа и докажите, что других нет.) (*С. Берлов*)

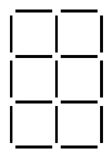
4. В каждую из трех школ микрорайона записалось по 100 первоклассников. 1 сентября в каждую школу пришло ровно 100 первоклассников. Но при этом некоторые дети перепутали, в какую школу им надо было идти, и ровно 40 детей пришли не в свою школу. Докажите, что можно выбрать двух заблудившихся первоклассников и поменять их местами так, что в результате каждый из них окажется в своей школе. (*О. Иванова*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2012 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
I ТУР. 7 КЛАСС.

---

1. В строку выписано 5 последовательных натуральных чисел. Возможно ли, что сумма цифр первого числа равна 52, а пятого — 20?

2. У ослика Иа-Иа есть 2012 палочек длиной 1 см, из которых он сложил клетчатый прямоугольник (сторона клетки — тоже 1 см). Найдите сумму периметра этого прямоугольника и его учетверенной площади. (Для примера на рисунке показан клетчатый прямоугольник 3×2, составленный из 17 палочек.)



(*И. Андреева*)

3. Умножая числа на калькуляторе, Владик обнаружил, что если произведение больше миллиарда, то калькулятор выдает ответ "E". Владик взял 10 чисел: k, ℓ, m, n, p; u, v, w, x, y и составил "таблицу умножения", в которой отметил все результаты, равные E. Докажите, что при составлении таблицы Владик ошибся. (*В. Франк*)

	k	ℓ	m	n	p
u	E		E		E
v	E	E	E		
w	E		E		E
x	E				
y	E	E	E	E	E

4. В каждую из трех школ микрорайона записалось по 100 первоклассников. 1 сентября в каждую школу пришло ровно 100 первоклассников. Но при этом некоторые дети перепутали, в какую школу им надо было идти, и ровно 40 детей пришли не в свою школу. Докажите, что можно выбрать двух заблудившихся первоклассников и поменять их местами так, что в результате каждый из них окажется в своей школе.

(*О. Иванова*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2012 года ПО МАТЕМАТИКЕ

I тур. 8 класс.

1. На уроке физкультуры все ученики $8^{\text{а}}$ класса построились в шеренгу. Оказалось, что мальчики и девочки в ней чередуются. Известно, что ровно 52 % учеников $8^{\text{а}}$ класса — мальчики. Найдите количество девочек в $8^{\text{а}}$ классе. Не забудьте обосновать ответ. (*Жюри*)

2. На острове 1000 деревень, в каждой из которых 99 жителей. Каждый житель острова — либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжет. При этом известно, что на острове ровно 54 054 рыцаря. В один прекрасный день каждому жителю острова был задан вопрос: “Кого в Вашей деревне больше: рыцарей или лжецов?” Оказалось, что в каждой деревне на этот вопрос 66 человек ответило, что в деревне больше рыцарей, и 33 — что больше лжецов. Сколько на острове деревень, в которых рыцарей больше, чем лжецов? (*О. Иванова*)

3. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL, и на ее продолжении за точку L выбрана точка K, для которой $LK = AB$. Оказалось, что $AK \parallel BC$. Докажите, что $AB > BC$. (*М. Русских*)

4. Квадрат 15×15 разбит на квадратики 1×1. Из этих квадратиков выбрали несколько, и в каждом из выбранных провели одну или две диагонали. Оказалось, что никакие две проведенные диагонали не имеют общих концов. Какое наибольшее число диагоналей может быть проведено? (В решении приведите ответ, способ проведения диагоналей и доказательство того, что это число диагоналей действительно наибольшее возможное.) (*А. Голованов*)

5. В строку выписаны 2011 последовательных пятизначных чисел. Оказалось, что сумма цифр 21-го числа равна 37, а сумма цифр 54-го равна 7. Найдите сумму цифр 2011-го числа. Не забудьте обосновать ответ. (*А. Голованов*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2012 года ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 9 класс.

---

1. На доске выписаны несколько последовательных натуральных чисел. Ровно 52% из них четны. Какое количество нечетных чисел выписано на доске? (*Жюри*)

2. В таверне “Подзорная труба” сидят несколько пиратов. Некоторые из них пьют грог, а остальные — ром. Средний возраст пиратов, пьющих грог, — 22 года, а пьющих ром — 45 лет. В один прекрасный момент Джон Сильвер поменял свой напиток. В результате оба средних возраста — и пьющих грог, и пьющих ром — увеличились ровно на 1 год. Сколько пиратов сидит в таверне? (*А. Храбров*)

3. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке X, а лучи DA и CB — в точке Y. Луч BA пересекает описанную окружность треугольника DXY в точке M, а луч BC пересекает ту же окружность в точке N. Докажите, что $NX + MY > XY$. (*А. Пастор*)

4. Квадрат 15×15 разбит на квадратики 1×1. Из этих квадратиков выбрали несколько, и в каждом из выбранных провели одну или две диагонали. Оказалось, что никакие две проведенные диагонали не имеют общих концов. Какое наибольшее число диагоналей может быть проведено? (В решении приведите ответ, способ проведения диагоналей и доказательство того, что это число диагоналей действительно наибольшее возможное.) (*А. Голованов*)

5. Какое наименьшее значение может принимать величина

$$a^{2012} + a^6 + \frac{1}{a^6 + 1}\,,$$

если a — произвольное вещественное число? (*К. Кохась*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2012 года ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 10 класс.

1. Ветви параболы $y = 4ax^2 + 12ax + 9a - 1$ направлены вниз. Докажите, что эта парабола не пересекается с осью абсцисс. (*Д. Максимов*)

2. В средней школе №1 Чудеснопольского района Страны Дураков работали штатные и внештатные педагоги, причем средняя зарплата штатных была равна 45 грошей, а внештатных — 11 грошей в месяц. Для выполнения нацпроекта «Статистика» одного из штатных педагогов перевели во внештатные (не изменив его зарплату), в результате чего и у штатных, и у внештатных педагогов средняя зарплата увеличилась на 2 гроша в месяц. Сколько всего педагогов в школе? (*А. Храбров*)

3. Окружность проходит через вершину B треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках X и Y соответственно, и касается стороны AC в ее середине M. Известно, что $AX = XM$. Докажите, что $CY = YM$. (*С. Берлов*)

4. Квадрат 15×15 разбит на квадратики 1×1. Из этих квадратиков выбрали несколько, и в каждом из выбранных провели одну или две диагонали. Оказалось, что никакие две проведенные диагонали не имеют общих концов. Какое наибольшее число диагоналей может быть проведено? (В решении приведите ответ, способ проведения диагоналей и доказательство того, что это число диагоналей действительно наибольшее возможное.) (*А. Голованов*)

5. Дана возрастающая последовательность натуральных чисел, в которой любые три подряд идущих числа образуют прогрессию — арифметическую или геометрическую. Известно, что первые два числа в последовательности делятся на 4. Докажите, что в последовательности нет простых чисел. (*О. Иванова*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2012 года ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 11 класс.

1. Корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ равны $\sin 42^\circ$ и $\sin 48^\circ$. Докажите, что $b^2 = a^2 + 2ac$. (*С. Иванов*)

2. В Чудеснопольской больнице работали штатные и внештатные врачи. Для выполнения нацпроекта «Статистика» одного штатного врача перевели во внештатные (не изменив его зарплату). В результате и у штатных, и у внештатных врачей средняя зарплата увеличилась на 3 гроша. Вдохновившись успехом, руководство перевело еще одного врача из штатных во внештатные (снова не меняя зарплаты). Средняя зарплата как штатных, так и внештатных врачей увеличилась на 3 %. Чему равна средняя зарплата всех врачей в больнице? (*А. Храбров*)

3. На острове жили 2011 негритят, каждый из которых был либо “рыцарем”, всегда говорящим правду, либо “лжецом”, который всегда лжет. Один из негритят сказал: *Среди жителей острова, отличных от меня, нечетное число лжецов.* После чего поперхнулся, и их осталось 2010. Еще один из негритят сказал ту же самую фразу: *Среди жителей острова, отличных от меня, нечетное число лжецов*, после чего не проснулся, и их осталось 2009. И так далее, они по одному говорили эту фразу и исчезали. Сейчас на острове осталось 10 негритят. Сколько лжецов могло быть среди негритят изначально?

(*О. Иванова, Ф. Петров*)

4. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ оказалось, что $\angle CAA_1 = 90^\circ$ и $AD = CB_1$. Докажите, что $\angle DB_1B = 90^\circ$. (*Д. Максимов, Ф. Петров*)

5. Для натурального n пусть $f(n)$ — наименьшее натуральное число, такое что $n \cdot f(n)$ — квадрат натурального числа (например, $f(12) = 3$). Докажите, что для натуральных k из промежутка $[10^{2011}; 10^{2011} + 10^{1000}]$ все значения $f(k)$ различны. (*Д. Максимов, Ф. Петров*)