САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2012 года ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 6 класс.

---

1. Можно ли расставить по окружности числа от 1 до 100 таким образом, чтобы каждые два соседних числа отличались либо в 2 раза, либо на 2? (*С. Берлов*)

2. На доске написано пять последовательных двузначных чисел. Петя сложил три из них и получил сумму, делящуюся на 37. Вася тоже сложил три числа и получил сумму, делящуюся на 71. Какие числа написаны на доске? (*А. Голованов*)

3. Петя и Вася играют в следующую игру. У Пети имеется 100 карточек, на которых по одному разу написаны числа от 1 до 100. Каждым ходом Петя выкладывает на стол две карточки, после чего Вася тут же забирает одну из них. После 50 ходов у Пети карточки закончатся, а на столе останется лежать 50 карточек. Цель Пети — сделать так, чтобы сумма чисел на этих 50 карточках оказалась четной. Может ли Вася ему помешать? (*С. Берлов*)

4. На окружности расположено 98 точек. В многоугольнике, который они образуют, проведено 33 синие диагонали, не пересекающиеся даже по концам. Докажите, что в этом многоугольнике можно так провести красную диагональ, что она пересечет не меньше трех синих (и при этом не будет иметь с ними общих концов). (*С. Берлов*)

. . . .

Олимпиада 2012 года. II тур. 6 класс. Выводная аудитория.

5. На доске написано число 0. За один ход можно увеличить число на доске на 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 или 9, но так, чтобы результат не делился на 10. Какое наибольшее число может получиться на доске через 100 ходов? (*С. Иванов*)

6. Каждая из 25 девочек дружит с некоторыми из 25 мальчиков. Девочка может “начать новую жизнь”: подружиться со всеми мальчиками, с которыми не дружила до этого, и поссориться со всеми, с которыми дружила. Докажите, что несколько девочек могут начать новую жизнь так, что в результате в этой компании можно будет найти трех мальчиков, у которых количество подружек почти одинаково (т. е. у любых двух из них количество подружек отличается не более чем на 1). (*О. Иванова*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2012 года ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 7 класс.

---

1. Можно ли числа от 99 до 200 расставить в ряд так, что любые два соседних числа будут отличаться либо на 2, либо в 2 раза? (*С. Берлов*)

2. На доске написано пять последовательных двузначных чисел. Петя сложил три из них и получил сумму, делящуюся на 37. Вася тоже сложил три числа и получил сумму, делящуюся на 71. Какие числа написаны на доске? (*А. Голованов*)

3. Среди чисел от 1 до 10^{23} каких больше — с двузначной суммой цифр или с трехзначной? (*В. Франк*)

4. В компании 100 человек, каждый из которых знаком ровно с 40 другими. Докажите, что можно выбрать четырех человек A, B, C, D так, что A и B будут знакомы друг с другом, C и D тоже будут знакомы, но при этом A и D будет незнакомы друг с другом и, кроме этого, B и C тоже будут незнакомы. (*С. Берлов*)

. . . .

Олимпиада 2012 года. II тур. 7 класс. Выводная аудитория.

5. Сумма двух наибольших собственных делителей n равна 515. Найдите все такие n. (*Собственным делителем* числа называется любой его натуральный делитель, кроме 1 и самого числа.) (*А. Голованов*)

6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точка M — середина стороны BC. Оказалось, что $\angle AMD = 60^\circ$. Точка K лежит в треугольнике CMD и симметрична точке B относительно прямой AM. Докажите, что $KD + MC \geqslant CD$.
(*С. Берлов, А. Смирнов и другие*)

7. В углу квадратной доски 120×120 стоит кубик. Его верхняя грань только что покрашена в красный цвет. Можно ли, кантуя кубик, передвинуть его в соседний угол доски так, чтобы он побывал на каждой клетке по одному разу? Доску пачкать не разрешается. (*Н. Косматов*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2012 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 8 класс.

---

1. Костя выписал на доске 155 последовательных натуральных чисел, после чего все использованные в этой записи единицы заменил на тройки, все тройки — на семерки и все семерки — на единицы. Он утверждает, что на доске вновь оказались 155 последовательных натуральных чисел (в некотором порядке). Докажите, что он ошибается. (*К. Кохась*)

2. На конференции "Истина и ложь в современном обществе" собрались за круглым столом рыцари и лжецы. Каждый из них повернулся к одному из своих соседей и произнес одну из двух фраз: "ты — рыцарь" или "ты — лжец". После этого корреспондент задал каждому участнику два вопроса: "называл ли вас лжецом ваш левый сосед" и "называл ли вас лжецом ваш правый сосед"? Среди всех ответов на эти вопросы ровно сто раз прозвучал ответ "Да". Каково наименьшее возможное число лжецов за столом? (*О. Иванова*)

3. Наибольший собственный делитель натурального числа n равен d. Может ли наибольший собственный делитель $n+2$ равняться $d+2$? (*Собственным делителем* числа называется любой его натуральный делитель, кроме 1 и самого числа.)

(*А. Голованов*)

4. BL — биссектриса треугольника ABC такого, что $\angle C = 3\angle A$. На стороне AB отмечена точка M, а на стороне AC — точка N такие, что $\angle AML = \angle ANM = 90°$. Докажите, что $BM + 2MN > BL + LM$. (*А. Пастор*)

. . . .

Олимпиада 2012 года. II тур. 8 класс. Выводная аудитория.

5. Дана арифметическая прогрессия с положительными членами a_1, a_2, ..., a_n. Докажите неравенство

$$\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \ldots + \frac{1}{a_n^2} \geq \frac{n}{a_1 a_n}.$$

(*Арифметической прогрессией* называется последовательность, для которой при всех i и некотором фиксированном d выполняется равенство $a_{i+1} = a_i + d$)

(*А. Храбров*)

6. В четырехугольнике $ABCD$ длины сторон BC и AD равны. Точка P — середина стороны BC, K — проекция D на отрезок AP. Оказалось, что $DC = CK$ и $\angle PAD = \angle ABC$. Докажите, что $AB = AP$. (*Д. Максимов, Ф. Петров*)

7. В компании из 100 человек каждый знаком ровно с 40 другими, но никакие двое не имеют более 20 общих знакомых. Докажите, что из этой компании можно выбрать 22 человека, которых можно посадить за круглый стол так, чтобы каждый из них был знаком ровно с одним из двух своих соседей. (*Д. Карпов, С. Берлов*)