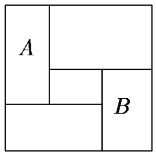
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2011 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
I ТУР. 6 КЛАСС.

1. Приведите пример трехзначного числа, которое не делится на 102, но если его запись повторить 15 раз, то полученное многозначное число будет делиться на 102. Поясните, почему вы считаете, что оно делится на 102. (*Н. Кушпель*)

2. Разрежьте по клеточкам квадрат размером 10×10 клеток на 5 прямоугольных частей по схеме, показанной на рисунке, так, чтобы площадь прямоугольника A была больше площади каждой из остальных частей, и при этом периметр прямоугольника B был больше периметра каждой из остальных частей. (*К. Кохась*)



3. На некоторых клетках доски 10×10 стоят шашки. Клетка называется красивой, если на горизонтали, проходящей через эту клетку, стоит нечетное число шашек, и на вертикали, проходящей через ту же клетку, тоже стоит нечетное число шашек. Может ли на доске оказаться ровно 42 красивые клетки? (*Д. Максимов*)

4. Треть всех мусорных контейнеров города Моськина установлена в магазинах, $1/9$ часть — в ресторанах, а остальные — в школах. $2/7$ от общего количества паштета лежит на прилавках магазинов, еще $2/7$ — на тарелках посетителей ресторанов, а остальной паштет поровну распределен по мусорным контейнерам. Во время стихийного нашествия дикие крысы съели 80% всего паштета. Возможно ли, что при этом крысы не притронулись к паштету в школах? Не забудьте обосновать ответ.

(*К. Кохась*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2011 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
I ТУР. 7 КЛАСС.

---

1. Найдите такое трехзначное число, не делящееся на 102, что если его запись повторить 2010 раз, то полученное многозначное число будет делиться на 102. Поясните, почему вы считаете, что оно делится на 102. (*Н. Кушпель*)

2. Пазл — это картинка, разрезанная на кусочки хитрой формы, среди которых нет одинаковых. Саша, Дима и Федя коллекционируют кусочки пазла “Растишка на Севере”. Если бы у Феди был желтый кусочек с носом Растишки, у Саши был зеленый кусочек с хвостом, а у Димы был синий кусочек с чёлкой, то оказалось бы, что любые два мальчика, собравшись вместе, могли бы из своих кусочков составить картинку целиком. Докажите, что уже сейчас втроем мальчики смогут целиком составить пазл. (*Ф. Бахарев*)

3. В школе писали контрольную работу по математике. Одна треть всех школьников плюс еще 20 школьников получили тройки, одна пятая всех школьников плюс еще 15 школьников получили четверки, одна седьмая всех школьников плюс еще 10 школьников получили пятерки, а остальные школьники получили двойки. Сколько школьников получили четверки, если известно, что количество двоек меньше чем количество пятерок? (*А. Храбров*)

4. На некоторых клетках доски 10×10 стоят шашки. Клетка называется красивой, если на горизонтали, проходящей через эту клетку, стоит нечетное число шашек, и на вертикали, проходящей через ту же клетку, тоже стоит нечетное число шашек. Может ли количество красивых клеток равняться 42? (*Д. Максимов*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2011 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 8 класс.

1. В школе была проведена контрольная работа по математике для всех восьмиклассников. Треть от числа участников и еще 20 учеников получили двойки, четверть от числа участников и ещё 30 учеников получили тройки, а некоторые умные ребята получили четверки. Кого оказалось больше: получивших двойку или получивших тройку?

(*А. Храбров*)

2. На некоторых клетках доски 10×10 стоят шашки. Клетка называется красивой, если на горизонтали, проходящей через эту клетку, стоит нечетное число шашек, и на вертикали, проходящей через ту же клетку, тоже стоит нечетное число шашек. Может ли на доске оказаться ровно 42 красивые клетки? (*Д. Максимов*)

3. Четыре человека написали поровну слов. Слово встречающееся у всех четверых, оценивается в 0 баллов; за слово, которое присутствует у троих участников, каждый из них получает по $1/3$ балла; за слово, встречающееся у двоих, каждый из них получает по 1 баллу. Наконец, за слово, встречающееся лишь у одного участника, этот участник получает 3 балла. Могли ли все участники в сумме набрать ровно 2010 баллов? (*К. Кохась*)

4. Точка M — середина стороны AC остроугольного треугольника ABC, AD — его высота. На отрезке BD отмечена такая точка E, что $AM = DE$. На отрезке EM отмечена такая точка F, что $EF = FC$. Докажите, что CF — биссектриса угла C треугольника ABC.

(*А. Пастор*)

5. Вдоль прямой аллеи растут, чередуясь, 36 берёз и 35 дубов. Расстояния от каждого некрайнего дерева до двух его соседей отличаются ровно в 8 раз. Докажите, что точно посередине аллеи не может расти дуб. (*О. Иванова*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2011 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ

I тур. 9 класс.

1. Дима задумал три числа — a, b и c — и обнаружил, что квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет два различных ненулевых корня: 1 и s. Саша изменил значение одного из коэффициентов a, b или c. В результате получился трехчлен, у которого тоже два различных корня: 2 и $3s$. Чему может быть равно s? Приведите все варианты ответа и докажите, что других нет. (*О. Иванова*)

2. В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD биссектриса угла B пересекает отрезок AD в точке M. Известно, что $AB = 4$, $BC = 9$ и $CD = 3$. В каком отношении точка M делит отрезок AD? (*С. Берлов*)

3. Три школьника написали поровну слов. Слово, встречающееся у всех троих школьников, оценивается в 0 баллов; за слово, которое присутствует у двоих школьников, каждый из них получает по 7/2 балла; наконец, слово, встречающееся лишь у одного школьника, стоит 5 баллов. Могли ли школьники в сумме набрать ровно 2011 баллов? (*К. Кохась*)

4. Произведение положительных чисел x и y равно 7. Докажите неравенство
$$x^{[x]} + y^{[y]} \geq 14\,.$$
(Запись $[x]$ обозначает целую часть числа, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x.) (*А. Храбров*)

5. На доске в ряд выписаны 10 натуральных чисел. Саша вычислил сумму каждой пары подряд стоящих чисел, затем он вычислил суммы каждых трех подряд стоящих чисел, потом — каждых четырех и т.д.; и наконец, сумму всех чисел на доске. Все найденные суммы, а также 10 исходных чисел с доски, Саша вперемешку записал в тетрадку. Мог ли у него получиться набор из 55 последовательных натуральных чисел? (*А. Храбров*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2011 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
I ТУР. 10 КЛАСС.

---

1. Квадратный трехчлен $f(x)$ имеет ровно один корень. Кроме того, уравнение

$$f(2x-3)+f(3x+1)=0$$

имеет ровно один корень. Найдите корень трехчлена $f(x)$. (Приведите все варианты и докажите, что других нет.) (*С. Иванов*)

2. В некоторых клетках квадратной таблицы стоят звездочки. Клетка называется красивой, если и в содержащей ее строчке стоит нечетное число звездочек, и в содержащем ее столбце стоит нечетное число звездочек. (В красивой клетке может стоять звездочка, а может и не стоять.) Саша насчитал в таблице ровно 2010 красивых клеток. Докажите, что он не прав. (*Д. Максимов*)

3. Докажите, что если $x \le y$, то $\frac{2^x+3^y}{2} \ge 6^{\frac{x+y}{4}}$. (*А. Голованов*)

4. Даны 46 различных натуральных чисел. Все их простые делители меньше 20. Докажите, что сумму каких-нибудь двух из них можно разложить в произведение трех натуральных чисел, больших 1. (*А. Голованов*)

5. Две окружности пересекаются в точках E и F. Прямая ℓ пересекает первую окружность в точках A и B, вторую — в точках C и D так, что точка E лежит внутри треугольника ADF, а точки B и C — на отрезке AD. Оказалось, что $AB=CD$. Докажите, что $BE \cdot DF = CE \cdot AF$. (*Д. Максимов*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2011 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
I ТУР. 11 КЛАСС.

1. Квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + bx + c$ имеет ровно один корень. Кроме того, уравнение

$$f(2x-3) + f(3x+1) = 0$$

имеет ровно один корень. Найдите b и c. (*С. Иванов*)

2. Несколько девятиклассников, десятиклассников и одиннадцатиклассников встали в круг. Оказалось, что имеется ровно 20 десятиклассников и ровно 25 одиннадцатиклассников, рядом с каждым из которых стоит хотя бы один девятиклассник. Докажите, что рядом с кем-то стоит два девятиклассника. (*А. Голованов*)

3. Произведение положительных чисел x и y равно 7. Докажите неравенство

$$x^{[x]} + y^{[y]} \geq 14\,.$$

(Запись $[x]$ обозначает целую часть числа, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x.) (*А. Храбров*)

4. В окружность вписан пятиугольник $ABCDE$. Отрезки AC и BD пересекаются в точке K. Отрезок CE касается описанной окружности треугольника ABK в точке N. Найдите $\angle CNK$, если известно, что $\angle ECD = 40°$. (*А. Смирнов*)

5. Даны 46 различных натуральных чисел. Все их простые делители меньше 20. Докажите, что сумму каких-нибудь двух из них можно разложить в произведение трех натуральных чисел, больших 1.

(*А. Голованов*)