САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2011 года ПО МАТЕМАТИКЕ

II тур. 9 класс.

1. Учитель выдал Диме и Сереже по квадратному трехчлену, написал на доске 4 числа и велел каждому из учеников подставить эти четыре числа в свой квадратный трехчлен. У Сережи получились значения 1, 3, 5 и 7. А Дима успел подставить только первые три числа и получил 17, 15 и 13. Когда же Дима собрался подставить четвертое число, оказалось, что учитель уже стер числа с доски. Какое у него получилось бы значение, если бы он успел подставить четвертое число? (Ответ должен быть конкретным числом). (*А. Голованов*)

2. Для натуральных чисел a и b выполняется неравенство

$$a \cdot \text{НОД}(a, b) + b \cdot \text{НОК}(a, b) < 2,5ab.$$

Докажите, что a делится на b. (*А. Храбров*)

3. Внутри треугольника ABC выбрана точка D, для которой $AD = DC$. Прямая BD пересекает сторону AC в точке E. Оказалось, что $\frac{BD}{BE} = \frac{AE}{EC}$. Докажите, что $BE = BC$. (*Ф. Бахарев*)

4. В городе Угрюмове 2 000 000 жителей, которые мало общаются друг с другом. Тем не менее, среди любых 2000 жителей найдутся трое попарно знакомых. Докажите, что в городе есть четверо попарно знакомых друг с другом жителей. (*А. Голованов, С. Берлов*)

. . . .

Олимпиада 2011 года. II тур. 9 класс. Выводная аудитория.

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ все углы меньше, чем $150°$, причем сумма углов A и D равна $150°$. Докажите, что его площадь больше, чем $\frac{1}{4}(AB \cdot CD + AB \cdot BC + BC \cdot CD)$. (*С. Берлов*)

6. Бесконечная последовательность a_1, a_2, a_3, ... составных натуральных чисел задается следующим правилом: $a_{n+1} = a_n - p_n + a_n/p_n$, где p_n — наименьший простой делитель a_n. Известно, что все члены последовательности кратны 37. Какие значения может принимать число a_1? (*О. Иванова*)

7. Саша и Сережа играют в игру на правильном стоугольнике. В начале игры Саша расставляет в вершинах стоугольника натуральные числа. Далее игроки ходят по очереди, начинает Сережа. Каждым ходом Сережа прибавляет по 1 к числам в двух противоположных вершинах, а Саша прибавляет по 1 к числам в двух соседних вершинах. Сережа стремится к тому, чтобы после его хода на стоугольнике стояло как можно больше нечетных чисел. Какого наибольшего количества он сможет добиться независимо от Сашиных действий? (*С. Берлов*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2011 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
II ТУР. 10 КЛАСС.

---

1. Учитель выдал каждому ученику 10“А” квадратный трехчлен, а потом написал на доске 4 числа и велел каждому ученику подставить эти четыре числа в его квадратный трехчлен. У Васи получились значения 2, 3, 5 и 8. А Петя успел подставить только первые три числа и получил 16, 15 и 13, а когда он собрался подставить четвертое число, оказалось, что учитель уже стер задание с доски. Помогите Пете найти четвертое значение (ответ должен быть обоснован, иначе Петя решит, что над ним издеваются). (*А. Голованов*)

2. У каждого натурального числа от $n+1$ до $n+1000$ выписывают все делители, не превосходящие 1000. Докажите, что для бесконечно многих натуральных n сумма всех выписанных чисел больше миллиона, и для бесконечно многих — меньше. (*А. Храбров, Ф. Петров*)

3. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC, с углом $\angle B = 30^\circ$. Луч BO пересекает AC в точке K. Точка L — середина дуги OC описанной окружности треугольника KOC, не содержащей точку K. Докажите, что A, B, L, K лежат на одной окружности. (*Ф. Петров*)

4. В городе Угрюмове 2 000 000 жителей, которые мало общаются друг с другом. Тем не менее, среди любых 2000 жителей найдутся трое попарно знакомых. Докажите, что в городе есть четверо попарно знакомых друг с другом жителей. (*А. Голованов, С. Берлов*)

. . . .

Олимпиада 2011 года. II тур. 10 класс. Выводная аудитория.

5. Назовем число x *далеким от квадратов и кубов*, если для каждого целого числа k выполняются неравенства $|x - k^2| > 10^6$ и $|x - k^3| > 10^6$. Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных чисел n, что число 2^n далеко от квадратов и кубов. (*А. Голованов, С. Иванов*)

6. Имеется гирлянда из n лампочек. Вначале некоторые из них включены, а некоторые нет. Разрешается взять любую горящую лампочку (только горящую!) и погасить ее, изменив при этом состояние двух соседних лампочек (горящие выключить, негорящие включить). При каких n можно с помощью этих операций выключить все лампочки независимо от их начального состояния? (*В. Волков, Р. Бойкий*)

7. На диагонали AC выпуклого четырехугольника $ABCD$ нашлась точка P, лежащая внутри треугольника ABD, для которой

$$\angle ACD + \angle BDP = \angle ACB + \angle DBP = 90^\circ - \angle BAD.$$

Докажите, что либо $\angle BAD + \angle BCD = 90^\circ$, либо $\angle BDA + \angle CAB = 90^\circ$. (*Ф. Петров, И. Богданов*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2011 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 11 класс.

1. Даны два квадратных трехчлена f и g. Трехчлен f принимает в некоторых четырех точках значения 2, 3, 7 и 10, а трехчлен g в первых трех из этих точек принимает значения соответственно 16, 15 и 11. Найдите значение трехчлена g в четвертой точке. (*А. Голованов*)

2. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC, в котором угол B равен $30°$. Луч BO пересекает AC в точке K. Точка L — середина дуги OC описанной окружности треугольника KOC, не содержащей точку K. Докажите, что точки A, B, L, K лежат на одной окружности. (*Ф. Петров*)

3. Можно ли сложить параллелепипед $6 \times 7 \times 7$ из брусков размера $1 \times 1 \times 2$ так, чтобы брусков каждого из трех возможных направлений было одинаковое количество?

4. Назовем число x *далеким от квадратов и кубов*, если для каждого целого числа k выполняются неравенства $|x - k^2| > 10^6$ и $|x - k^3| > 10^6$. Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных чисел n, что число 2^n далеко от квадратов и кубов. (*А. Голованов, С. Иванов*)

. . . .

Олимпиада 2011 года. II тур. 11 класс. Выводная аудитория.

5. На доске написано натуральное число. Каждую минуту к числу на доске прибавляют разность между его наибольшим собственным делителем и его наименьшим собственным делителем, и результат записывают на доску вместо исходного числа. (Если число на доске оказалось простым, то процесс заканчивается.) В начале написано число, большее 1000. Докажите, что рано или поздно на доске появится число, не делящееся на 17. (*О. Иванова*)

6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точка M — середина диагонали AC, причем $\angle MCB = \angle CMD = \angle MBA = \angle MBC - \angle MDC$. Докажите, что $AD = DC + AB$. (*А. Акопян, Ф. Петров*)

7. В тайном обществе 2011 членов, и у каждого есть счет в банке (на счету целое число рублей, которое может быть отрицательным). Время от времени один из членов общества переводит со своего счета на счет каждого из своих друзей, состоящих в обществе, по 1 рублю. Известно, что с помощью цепочки таких переводов они могут перераспределить имеющиеся на счетах средства произвольным образом. Докажите, что в этом обществе ровно 2010 пар друзей.