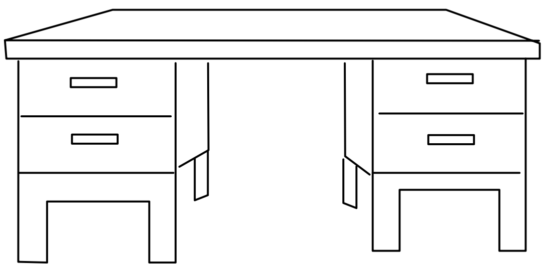
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2010 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ

I тур. 6 класс.

1. На Поле Чудес растут два дерева. Если закопать несколько золотых под одним из них, то наутро сумма удвоится, а если под вторым — утроится. У Буратино есть 100 золотых. Он не знает, какое из деревьев удваивает деньги, а какое утраивает, но хочет к утру иметь ровно 175 золотых. Как ему этого добиться? (Буратино может закопать часть денег под первое дерево, часть под второе, а часть не закапывать вовсе.)

(*Ф. Бахарев по мотивам задачи Д. Максимова*)

2. Есть 100 пуговиц с двумя дырками и 100 пуговиц с четырьмя дырками. Можно ли положить их в 4 ящика стола, показанного на рисунке, так, чтобы в двух верхних ящиках лежало 120 пуговиц, в ящиках правой тумбы лежало 110 пуговиц, у пуговиц в двух нижних ящиках было бы в сумме 360 дырок и, наконец, у пуговиц в ящиках левой тумбы было бы 320 дырок?



3. Вдоль реки расположены пристани А, Б, В, Г (именно в таком порядке). От В до А теплоход плывет 1 час, от В до Г — тоже 1 час, а от Б до Г — 2 часа. В какую сторону течет река — от А к Г или от Г к А? Не забудьте обосновать ответ. (*О. Иванова*)

4. Шифровальщик Федя заменяет буквы русского алфавита цифрами (одинаковые буквы он заменяет одинаковыми цифрами). После замены оказалось, что разность ВЕСНА – НАВЕС делится на 11. Докажите, что буквы “Н” и “А” он заменил на одну и ту же цифру. (*Ф. Бахарев*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2010 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 7 класс.

1. На Поле Чудес растут два дерева. Если закопать несколько золотых под одним из них, то наутро сумма удвоится, а если под вторым — утроится. У Буратино есть 100 золотых. Он не знает, какое из деревьев удваивает деньги, а какое утраивает, но хочет к утру иметь ровно 175 золотых. Как ему этого добиться? (Буратино может закопать часть денег под первое дерево, часть под второе, а часть не закапывать вовсе.)
(*Ф. Бахарев по мотивам задачи Д. Максимова*)

2. Вдоль реки расположены пристани А, Б, В, Г (именно в таком порядке). От В до А теплоход плывет 1 час, от В до Г — тоже 1 час, а от Б до Г — 2 часа. В какую сторону течет река — от А к Г или от Г к А? Не забудьте обосновать ответ. (*О. Иванова*)

3. Саша задумал четыре натуральных числа. Он умножил каждое число на 3 и все четыре результата выписал на доску. Кроме того, он подсчитал все возможные произведения, составленные из двух задуманных чисел, и получившиеся шесть произведений тоже выписал на доску. Докажите, что среди десяти чисел, написанных на доске, какие-то два числа оканчиваются одной и той же цифрой.

4. На поляне пасутся 150 коз. Поляна разделена изгородями на несколько участков. Ровно в полдень каждая коза перепрыгнула со своего участка на один из соседних. Пастух подсчитал, что в результате на каждом участке количество коз изменилось ровно в семь раз. Докажите, что он ошибся. (*К. Кохась*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2010 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ

I тур. 8 класс.

1. Вдоль реки расположены пристани А, Б, В, Г (именно в таком порядке). От В до А теплоход плывет 1 час, от В до Г — тоже 1 час, а от Б до Г — 2 часа. В какую сторону течет река — от А к Г или от Г к А? Не забудьте обосновать ответ. (*О. Иванова*)

2. На поляне пасутся 150 коз. Поляна разделена изгородями на несколько участков. Ровно в полдень некоторые козы перепрыгнули на другие участки. Пастух подсчитал, что на каждом участке количество коз изменилось ровно в семь раз. Докажите, что он ошибся. (*К. Кохась*)

3. Точка M — середина стороны AB треугольника ABC. На отрезке CM выбраны точки P и Q так, что $CQ = 2PM$. Оказалось, что $\angle APM = 90°$. Докажите, что $BQ = AC$.

4. Натуральные числа x и y меньше 2009. Известно, что x делится на 54, y делится на 31, $x + y$ делится на 85. Докажите, что $x - y$ делится на 23. (*по мотивам задачи Д. Ростовского*)

5. Саша задумал 20 натуральных чисел и вычислил все возможные произведения, составленные из двух задуманных чисел. Получилось 190 произведений. Докажите, что среди этих произведений найдутся 20, которые оканчиваются одной и той же цифрой.

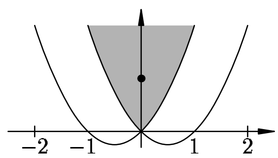
(*по мотивам задачи А. Голованова*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2010 года ПО МАТЕМАТИКЕ

I тур. 9 класс.

1. В квадрате 3×3 расставлены цифры от 1 до 9, каждая — по одному разу. Если прочесть цифры каждой строки слева направо, а каждого столбца — сверху вниз, получатся трехзначные числа. Известно, что трехзначное число в первой строке равно половине суммы трехзначных чисел во второй и в третьей строках; а трехзначное число в третьем столбце равно половине суммы трехзначных чисел в первом и втором столбцах. Приведите пример такой расстановки. (*С. Берлов*)

2. На рисунке изображены две параболы, старшие коэффициенты которых равны единице. Третья парабола имеет вершину в точке $(0, 1)$ и целиком лежит в закрашенной области (возможно, касается ее границы). Какое наименьшее значение может принимать ее старший коэффициент?



(*К. Кохась*)

3. На поляне пасутся 100 коз. Поляна разделена изгородями на несколько участков. Ровно в полдень некоторые козы перепрыгнули на другие участки. Пастух подсчитал, что на каждом участке количество коз изменилось ровно в три раза. Докажите, что до полудня на поляне можно было найти несколько участков, на которых в сумме паслось ровно 25 коз. (*С. Берлов*)

4. На стороне AD параллелограмма $ABCD$ выбрана точка X, а на продолжении этой стороны за точку D выбрана точка Y, причем $AX = XY$. Прямые BX и CD пересекаются в точке L, а прямые BY и CD — в точке K. Докажите, что $CK = KL$. (*Ф. Бахарев*)

5. Натуральные числа x и y меньше 4 000 000. Дима разделил с остатком число $2x+1$ на 2009, Саша разделил с остатком число $2y-1$ на 2010, а Сережа разделил с остатком число $x+y$ на 4019. У всех трех мальчиков остатки оказались одинаковыми. Докажите, что в Сашином делении неполное частное было четным. (*Д. Ростовский*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2010 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 10 класс.

1. $f(x)$, $g(x)$ и $f(x)+g(x)$ — квадратные трехчлены. Саша выписал на доску все корни этих квадратных трехчленов. Оказалось, что среди выписанных чисел имеется ровно три различных числа. Докажите, что хотя бы один из трехчленов $f(x)$, $g(x)$ и $f(x)+g(x)$ имеет ровно один корень. (*А. Храбров*)

2. Натуральные числа x, y, z таковы, что НОД$(x, y) = z$ и НОК$(y, z) = x$. Докажите, что $x = y = z$. (*Жюри*)

3. Высоты AD и BE остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Описанная окружность треугольника ABH пересекает отрезки AC и BC в точках F и G, отличных от концов. Докажите, что $FG = 2DE$. (*А. Пастор*)

4. На Поле Чудес растут три дерева. Если закопать несколько золотых под одним из них, то наутро сумма удвоится, если под другим — утроится, если под третьим — исчезнет. У Буратино есть 100 золотых. Он не знает, какое из деревьев удваивает деньги, какое утраивает, а какое уничтожает. Какую наибольшую сумму он может обеспечить себе наутро? (*Д. Максимов*)

5. Сколько решений имеет уравнение

$$\sin[x] = \{x\}$$

на промежутке $[-2009; 2010]$? (Как обычно, $[x]$ — это целая часть числа x, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x; $\{x\} = x - [x]$ — дробная часть числа x. Тот факт, что синус ненулевого целого числа не может быть целым, можно считать известным.) (*Г. Вольфсон*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2010 года ПО МАТЕМАТИКЕ

I тур. 11 класс.

1. Расставьте в таблице 3×3 числа от 15 до 23 так, чтобы все суммы в парах соседних клеток были различны.

2. Числа a, b, c $(0 < a < b < c < \pi)$ образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что квадратное уравнение

$$(\sin a)\, x^2 + 2(\sin b)\, x + \sin c = 0$$

имеет два различных вещественных корня.

3. Натуральные числа x и y меньше $4\,000\,000$. Дима разделил с остатком число $2x+1$ на 2009, Саша разделил с остатком число $2y-1$ на 2010, а Сережа разделил с остатком число $x+y$ на 4019. У всех трех мальчиков остатки оказались одинаковыми. Докажите, что неполные частные у Димы и Саши равны. (*Д. Ростовский*)

4. На Поле Чудес растут три дерева. Если закопать несколько золотых под одним из них, то наутро сумма удвоится, если под другим — утроится, если под третьим — исчезнет. У Буратино есть 100 золотых. Он не знает, какое из деревьев удваивает деньги, какое утраивает, а какое уничтожает. Какую наибольшую сумму он может обеспечить себе наутро? (*Д. Максимов*)

5. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. В треугольнике ABC выбрана точка P, а в параллелограмме ACC_1A_1 — точка K так, что прямая PK параллельна плоскости ACD_1. Докажите, что отрезок PK делится плоскостью ACB_1 пополам.