САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2010 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 9 класс.

1. В некоторой клетке шахматной доски стоит король. Каждый день, начиная с понедельника, Сережа делает этим королем один ход. По воскресеньям он делает ход на одну клетку по диагонали, а в каждый из остальных дней — на одну клетку по горизонтали или по вертикали. Сережа никогда не ставит короля на клетку, на которой король уже однажды побывал (считается, что на исходной клетке король уже побывал). На каком наибольшем количестве клеток сможет побывать король?

(*С. Берлов*)

2. Точки M и N — середины сторон AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$. На сторонах AD и BC выбраны точки X и Y так, что $XD = 3AX$ и $YC = 3BY$. Оказалось, что $\angle MXA = \angle MYB = 90°$. Докажите, что $\angle XMN = \angle ABC$.

(*С. Берлов*)

3. Числа a и $a^3 - 6a$ — корни квадратного трехчлена с целыми коэффициентами. При этом число a иррационально. Чему может быть равно a? (*А. Храбров*)

4. Натуральное число A состоит из 20 цифр. На доску выписали число $\underbrace{AA\ldots A}_{101 \text{ раз}}$, после чего после чего последние 11 цифр стерли. Докажите, что полученное 2009-значное число не может быть степенью двойки. (*Н. Филонов*)

. . . .

Олимпиада 2010 года. II тур. 9 класс. Выводная аудитория.

5. В стране 2010 городов и любые два из них соединены дорогой (не проходящей через другие города). Бизнесмен и Министерство Дорожного Строительства играют в игру. Бизнесмен каждое утро приватизирует одну из дорог, а Министерство каждый вечер разрушает по десять еще не приватизированных дорог. Сможет ли Бизнесмен, несмотря на козни Министерства, создать циклический маршрут по приватизированным дорогам, проходящий по одному разу по 11 разным городам?

(*С. Берлов*)

6. Положительные числа a, b, c удовлетворяют условию $\dfrac{3}{abc} \geq a + b + c$. Докажите неравенство $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \geq a + b + c$. (*А. Храбров*)

7. Вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон BC, CA и AB в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Прямая AA_1 вторично пересекает эту окружность в точке E. Точка N — середина отрезка A_1B_1. Точка M симметрична точке N относительно прямой AA_1. Докажите, что $\angle EMC = 90°$. (*А. Смирнов*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2010 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 10 класс.

---

1. Дан квадратный трехчлен $f(x)$. Всегда ли можно найти такой многочлен четвертой степени $g(x)$, что уравнение $f(g(x)) = 0$ не имеет решений?

(*А. Голованов*)

2. У каждого из десяти последовательных тридцатизначных чисел выписали на доску наибольший его делитель, меньший самого этого числа. Докажите, что среди выписанных чисел есть два, оканчивающихся одной и той же цифрой.

(*А. Голованов*)

3. Точки M и N — середины сторон AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$. На сторонах AD и BC выбраны точки X и Y так, что $XD = 3AX$ и $YC = 3BY$. Оказалось, что $\angle MXA = \angle MYB = 90^\circ$. Докажите, что $\angle XMN = \angle ABC$.

(*С. Берлов*)

4. В стране 2010 городов, из каждого из которых выходит ровно по три дороги, ведущие в другие города. Президент и премьер-министр играют в следующую игру: они по очереди продают дороги трем частным компаниям (изначально все дороги государственные, каждый своим ходом продает ровно одну дорогу). Первым ходит премьер. Президент хочет добиться того, чтобы хотя бы для одного города все три выходящие из него дороги оказались проданы разным компаниям, а премьер хочет этого избежать. Проигравший уходит в отставку. Кто из двух политиков сможет сохранить свой пост при правильной игре? (*Д. Карпов*)

....

Олимпиада 2010 года. II тур. 10 класс. Выводная аудитория.

5. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) отмечены середины X и Y сторон AB и AC соответственно. Точка Z — основание перпендикуляра из точки B на прямую CX. Докажите, что центр описанной окружности треугольника XYZ лежит на прямой AC. (*Ф. Бахарев*)

6. Дано натуральное число. Из него вычитается самое большое простое число, не превосходящее его. С результатом снова производится такая же операция и т.д. Докажите, что существует число, из которого ровно через 1000 шагов впервые получится ноль. (*А. Голованов*)

7. Изначально квадрат 200×200 покрашен в черный и белый цвета в шахматном порядке. Разрешается выбрать любой клетчатый прямоугольник 2×3, лежащий в нашем квадрате и перекрасить каждую его клетку в противоположный цвет. Можно ли с помощью нескольких таких операций сделать все клетки одноцветными?

(*С. Берлов, Д. Карпов*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2010 года ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 11 класс.

1. Решите в положительных числах систему уравнений $x^y = z, y^z = x, z^x = y$. (*Ф. Петров*)

2. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) отмечены середины X и Y сторон AC и AB соответственно. Точка Z — основание перпендикуляра из точки B на прямую CY. Докажите, что центр описанной окружности треугольника XYZ лежит на прямой AC. (*Ф. Бахарев*)

3. В стране 2009 городов и любые два из них соединены дорогой (не проходящей через другие города). Бизнесмен и Министерство Дорожного Строительства играют в игру. Бизнесмен каждое утро приватизирует одну из дорог, а Министерство каждый вечер разрушает по десять еще не приватизированных им дорог. Сможет ли Бизнесмен, несмотря на козни Министерства, создать циклический маршрут из приватизированных дорог, проходящий по одному разу ровно по 75 разным городам? (*С. Берлов*)

4. Дано натуральное число. Из него вычитается самое большое простое число, не превосходящее его. С результатом снова производится такая же операция и т.д. Назовем число качественным, если из него через несколько шагов получается 1, и некачественным — если ноль. Докажите, что среди чисел от 1 до 1000000 качественные составляют не менее четверти, но не более половины. (*Ф. Петров*)

. . . .

Олимпиада 2010 года. II тур. 11 класс. Выводная аудитория.

5. Дана четырехугольная пирамида $SABCD$, боковые грани которой — остроугольные треугольники, точки пересечения высот которых лежат в одной плоскости. Диагонали AC и BD основания пирамиды пересекаются в точке P. Оказалось, что SP — высота пирамиды. Докажите, что $AC \perp BD$. (*Д. Максимов*)

6. Известно, что для положительных чисел a, b, c выполняется равенство $ab + bc + ac = a + b + c$. Докажите, что $a + b + c + 1 \geq 4abc$. (*К. Сухов*)

7. 600 натуральных чисел из отрезка $[1, 1000]$ покрашены в малиновый цвет. Отрезок натурального ряда от $[k, n]$ называется вкусным, если в нем найдутся два малиновых числа с любой целой разностью от 1 до $n - k$. Докажите, что существует вкусный отрезок $[a, b]$, в котором $b - a \geq 199$. (*Е. Малинникова, С. Рукшин*)