8 класс

Первый день

8.1. Гриб называется *плохим*, если в нем не менее 10 червей. В лукошке 90 плохих и 10 хороших грибов. Могут ли все грибы стать хорошими после того, как некоторые черви переползут из плохих грибов в хорошие?

8.2. Точка K — середина гипотенузы AB прямоугольного равнобедренного треугольника ABC. Точки L и M выбраны на катетах BC и AC соответственно так, что $BL = CM$. Докажите, что треугольник LMK — также прямоугольный равнобедренный.

8.3. По кругу выписаны числа $1, 2, 3, \ldots, 10$ в некотором порядке. Петя вычислил 10 сумм всех троек соседних чисел и написал на доске наименьшее из вычисленных чисел. Какое наибольшее число могло быть написано на доске?

8.4. Имеются чашечные весы и 100 монет, среди которых несколько (больше 0, но меньше 99) фальшивых монет. Все фальшивые весят одинаково, все настоящие тоже весят одинаково, при этом фальшивая монета легче настоящей. Можно делать взвешивание на весах, заплатив перед взвешиванием одну из монет. Докажите, что можно с гарантией обнаружить настоящую монету.

XXXV Всероссийская математическая олимпиада школьников

8 класс

Первый день

8.1. Гриб называется *плохим*, если в нем не менее 10 червей. В лукошке 90 плохих и 10 хороших грибов. Могут ли все грибы стать хорошими после того, как некоторые черви переползут из плохих грибов в хорошие?

8.2. Точка K — середина гипотенузы AB прямоугольного равнобедренного треугольника ABC. Точки L и M выбраны на катетах BC и AC соответственно так, что $BL = CM$. Докажите, что треугольник LMK — также прямоугольный равнобедренный.

8.3. По кругу выписаны числа $1, 2, 3, \ldots, 10$ в некотором порядке. Петя вычислил 10 сумм всех троек соседних чисел и написал на доске наименьшее из вычисленных чисел. Какое наибольшее число могло быть написано на доске?

8.4. Имеются чашечные весы и 100 монет, среди которых несколько (больше 0, но меньше 99) фальшивых монет. Все фальшивые весят одинаково, все настоящие тоже весят одинаково, при этом фальшивая монета легче настоящей. Можно делать взвешивание на весах, заплатив перед взвешиванием одну из монет. Докажите, что можно с гарантией обнаружить настоящую монету.

9 класс

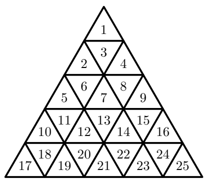
Первый день

9.1. Гриб называется *плохим*, если в нем не менее 10 червей. В лукошке 90 плохих и 10 хороших грибов. Могут ли все грибы стать хорошими после того, как некоторые черви переползут из плохих грибов в хорошие?

9.2. Рациональные числа a и b удовлетворяют равенству
$$a^3b + ab^3 + 2a^2b^2 + 2a + 2b + 1 = 0.$$
Докажите, что число $1-ab$ является квадратом рационального числа.

9.3. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. Прямая, перпендикулярная стороне AC и проходящая через точку A_1, пересекает прямую B_1C_1 в точке D. Докажите, что угол ADC прямой.

9.4. На рисунке показан треугольник, разбитый на 25 меньших треугольников, занумерованных числами от 1 до 25. Можно ли эти же числа расставить в клетках квадрата 5×5 так, чтобы любые два числа, записанные в соседних треугольниках, были записаны и в соседних клетках квадрата? (Треугольники, так же, как и клетки квадрата, считаются соседними, если имеют общую сторону.)



XXXV Всероссийская математическая олимпиада школьников

9 класс

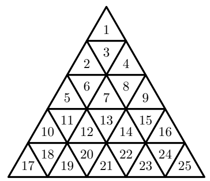
Первый день

9.1. Гриб называется *плохим*, если в нем не менее 10 червей. В лукошке 90 плохих и 10 хороших грибов. Могут ли все грибы стать хорошими после того, как некоторые черви переползут из плохих грибов в хорошие?

9.2. Рациональные числа a и b удовлетворяют равенству
$$a^3b + ab^3 + 2a^2b^2 + 2a + 2b + 1 = 0.$$
Докажите, что число $1-ab$ является квадратом рационального числа.

9.3. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. Прямая, перпендикулярная стороне AC и проходящая через точку A_1, пересекает прямую B_1C_1 в точке D. Докажите, что угол ADC прямой.

9.4. На рисунке показан треугольник, разбитый на 25 меньших треугольников, занумерованных числами от 1 до 25. Можно ли эти же числа расставить в клетках квадрата 5×5 так, чтобы любые два числа, записанные в соседних треугольниках, были записаны и в соседних клетках квадрата? (Треугольники, так же, как и клетки квадрата, считаются соседними, если имеют общую сторону.)



10 класс

Первый день

10.1. Квадратный трехчлен $f(x)$ таков, что многочлен $(f(x))^3 - f(x)$ имеет ровно три вещественных корня. Найдите ординату вершины графика этого трехчлена.

10.2. Докажите, что найдется такое натуральное число $n > 1$, что произведение некоторых n последовательных натуральных чисел равно произведению некоторых $n + 100$ последовательных натуральных чисел.

10.3. У Кости было два набора по 17 монет: в одном наборе все монеты настоящие, а в другом наборе ровно 5 фальшивых (все монеты выглядят одинаково; все настоящие монеты весят одинаково, все фальшивые тоже весят одинаково, но неизвестно, легче или тяжелее настоящих). Один из наборов Костя отдал другу, а впоследствии забыл, какой именно из двух наборов у него остался. Может ли Костя при помощи двух взвешиваний на чашечных весах без гирь выяснить, какой именно из двух наборов он отдал?

10.4. Окружности ω_1 и ω_2 касаются внешним образом в точке O. Точки A и B на окружности ω_1 и точки C и D на окружности ω_2 таковы, что AC и BD — общие внешние касательные к окружностям. Прямая AO пересекает отрезок CD в точке M, а прямая CO пересекает вторично окружность ω_1 в точке N. Докажите, что точки B, M и N лежат на одной прямой.

XXXV Всероссийская математическая олимпиада школьников

10 класс

Первый день

10.1. Квадратный трехчлен $f(x)$ таков, что многочлен $(f(x))^3 - f(x)$ имеет ровно три вещественных корня. Найдите ординату вершины графика этого трехчлена.

10.2. Докажите, что найдется такое натуральное число $n > 1$, что произведение некоторых n последовательных натуральных чисел равно произведению некоторых $n + 100$ последовательных натуральных чисел.

10.3. У Кости было два набора по 17 монет: в одном наборе все монеты настоящие, а в другом наборе ровно 5 фальшивых (все монеты выглядят одинаково; все настоящие монеты весят одинаково, все фальшивые тоже весят одинаково, но неизвестно, легче или тяжелее настоящих). Один из наборов Костя отдал другу, а впоследствии забыл, какой именно из двух наборов у него остался. Может ли Костя при помощи двух взвешиваний на чашечных весах без гирь выяснить, какой именно из двух наборов он отдал?

10.4. Окружности ω_1 и ω_2 касаются внешним образом в точке O. Точки A и B на окружности ω_1 и точки C и D на окружности ω_2 таковы, что AC и BD — общие внешние касательные к окружностям. Прямая AO пересекает отрезок CD в точке M, а прямая CO пересекает вторично окружность ω_1 в точке N. Докажите, что точки B, M и N лежат на одной прямой.

11 класс

Первый день

11.1. Квадратный трехчлен $f(x)$ таков, что многочлен $(f(x))^5 - f(x)$ имеет ровно три вещественных корня. Найдите ординату вершины графика этого трехчлена.

11.2. В некоторых клетках таблицы 10×10 расставлены несколько крестиков и несколько ноликов. Известно, что нет линии (строки или столбца), полностью заполненной одинаковыми значками (крестиками или ноликами). Однако, если в любую пустую клетку поставить любой значок, то это условие нарушится. Какое минимальное число значков может стоять в таблице?

11.3. Докажите, что $x \cos x \leqslant \frac{\pi^2}{16}$ при $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

11.4. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведена высота AA' и отмечены точки H и O — точка пересечения высот и центр описанной окружности. Докажите, что точка, симметричная центру описанной окружности треугольника HOA' относительно прямой HO, лежит на средней линии треугольника ABC.

XXXV Всероссийская математическая олимпиада школьников

11 класс

Первый день

11.1. Квадратный трехчлен $f(x)$ таков, что многочлен $(f(x))^5 - f(x)$ имеет ровно три вещественных корня. Найдите ординату вершины графика этого трехчлена.

11.2. В некоторых клетках таблицы 10×10 расставлены несколько крестиков и несколько ноликов. Известно, что нет линии (строки или столбца), полностью заполненной одинаковыми значками (крестиками или ноликами). Однако, если в любую пустую клетку поставить любой значок, то это условие нарушится. Какое минимальное число значков может стоять в таблице?

11.3. Докажите, что $x \cos x \leqslant \frac{\pi^2}{16}$ при $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

11.4. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведена высота AA' и отмечены точки H и O — точка пересечения высот и центр описанной окружности. Докажите, что точка, симметричная центру описанной окружности треугольника HOA' относительно прямой HO, лежит на средней линии треугольника ABC.