8 класс

Второй день

8.5. На столе лежат 7 карточек с цифрами от 0 до 6. Двое по очереди берут по одной карточке. Выигрывает тот, кто впервые из своих карточек сможет составить число, делящееся на 17. Кто выиграет при правильной игре — начинающий или его противник?

8.6. В трех клетках клетчатого листа записаны числа, а остальные клетки пусты. Разрешается выбрать два числа из разных непустых клеток и записать в пустую клетку их сумму; также можно выбрать числа a, b, c из трех разных непустых клеток и записать в пустую клетку число $ab + c^2$. Докажите, что при помощи нескольких таких операций можно записать в одну из клеток квадрат суммы трех исходных чисел (какими бы они ни были).

8.7. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ некоторая точка диагонали AC принадлежит серединным перпендикулярам к сторонам AB и CD, а некоторая точка диагонали BD принадлежит серединным перпендикулярам к сторонам AD и BC. Докажите, что $ABCD$ — прямоугольник.

8.8. В футбольном турнире участвовало 8 команд, причем каждая сыграла с каждой ровно по одному разу. Известно, что любые две команды, сыгравшие между собой вничью, набрали в итоге разное число очков. Найдите наибольшее возможное общее число ничьих в этом турнире. (За выигрыш матча команде начисляется 3 очка, за ничью — 1, за поражение — 0.)

XXXV Всероссийская математическая олимпиада школьников

8 класс

Второй день

8.5. На столе лежат 7 карточек с цифрами от 0 до 6. Двое по очереди берут по одной карточке. Выигрывает тот, кто впервые из своих карточек сможет составить число, делящееся на 17. Кто выиграет при правильной игре — начинающий или его противник?

8.6. В трех клетках клетчатого листа записаны числа, а остальные клетки пусты. Разрешается выбрать два числа из разных непустых клеток и записать в пустую клетку их сумму; также можно выбрать числа a, b, c из трех разных непустых клеток и записать в пустую клетку число $ab + c^2$. Докажите, что при помощи нескольких таких операций можно записать в одну из клеток квадрат суммы трех исходных чисел (какими бы они ни были).

8.7. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ некоторая точка диагонали AC принадлежит серединным перпендикулярам к сторонам AB и CD, а некоторая точка диагонали BD принадлежит серединным перпендикулярам к сторонам AD и BC. Докажите, что $ABCD$ — прямоугольник.

8.8. В футбольном турнире участвовало 8 команд, причем каждая сыграла с каждой ровно по одному разу. Известно, что любые две команды, сыгравшие между собой вничью, набрали в итоге разное число очков. Найдите наибольшее возможное общее число ничьих в этом турнире. (За выигрыш матча команде начисляется 3 очка, за ничью — 1, за поражение — 0.)

9 класс

Второй день

9.5. На 11 листках бумаги написаны 11 фраз (по одной на листке):
1) Левее этого листка нет листков с ложными утверждениями.
2) Ровно один листок левее этого содержит ложное утверждение.
3) Ровно 2 листка левее этого содержат ложные утверждения.
. . .
11) Ровно 10 листков левее этого содержат ложные утверждения.

Листки в некотором порядке выложили в ряд, идущий слева направо. После этого некоторые из написанных утверждений стали верными, а некоторые — неверными. Каково наибольшее возможное число верных утверждений?

9.6. Натуральное число m таково, что сумма цифр в десятичной записи числа 8^m равна 8. Может ли при этом последняя цифра числа 8^m быть равной 6?

9.7. Дан параллелограмм $ABCD$, в котором угол ABC тупой. Прямая AD пересекает второй раз окружность ω, описанную вокруг треугольника ABC, в точке E. Прямая CD пересекает второй раз окружность ω в точке F. Докажите, что центр описанной окружности треугольника DEF лежит на окружности ω.

9.8. В шахматном турнире участвовали 8 шахматистов, причем каждый сыграл с каждым ровно по одной партии. Известно, что любые два шахматиста, сыгравшие между собой вничью, набрали в итоге разное число очков. Найдите наибольшее возможное число ничьих в этом турнире. (За выигрыш партии шахматисту начисляется 1 очко, за ничью — $\frac{1}{2}$ очка, за поражение — 0.)

XXXV Всероссийская математическая олимпиада школьников

9 класс

Второй день

9.5. На 11 листках бумаги написаны 11 фраз (по одной на листке):
1) Левее этого листка нет листков с ложными утверждениями.
2) Ровно один листок левее этого содержит ложное утверждение.
3) Ровно 2 листка левее этого содержат ложные утверждения.
. . .
11) Ровно 10 листков левее этого содержат ложные утверждения.

Листки в некотором порядке выложили в ряд, идущий слева направо. После этого некоторые из написанных утверждений стали верными, а некоторые — неверными. Каково наибольшее возможное число верных утверждений?

9.6. Натуральное число m таково, что сумма цифр в десятичной записи числа 8^m равна 8. Может ли при этом последняя цифра числа 8^m быть равной 6?

9.7. Дан параллелограмм $ABCD$, в котором угол ABC тупой. Прямая AD пересекает второй раз окружность ω, описанную вокруг треугольника ABC, в точке E. Прямая CD пересекает второй раз окружность ω в точке F. Докажите, что центр описанной окружности треугольника DEF лежит на окружности ω.

9.8. В шахматном турнире участвовали 8 шахматистов, причем каждый сыграл с каждым ровно по одной партии. Известно, что любые два шахматиста, сыгравшие между собой вничью, набрали в итоге разное число очков. Найдите наибольшее возможное число ничьих в этом турнире. (За выигрыш партии шахматисту начисляется 1 очко, за ничью — $\frac{1}{2}$ очка, за поражение — 0.)

10 класс

Второй день

10.5. Натуральное число m таково, что сумма цифр в десятичной записи числа 2^m равна 8. Может ли при этом последняя цифра числа 2^m быть равной 6?

10.6. Вписанная в треугольник ABC окружность ω касается сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. На продолжении отрезка AA_1 за точку A взята точка D такая что $AD = AC_1$. Прямые DB_1 и DC_1 пересекают второй раз окружность ω в точках B_2 и C_2. Докажите, что B_2C_2 — диаметр окружности ω.

10.7. Положительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_{2009}$ удовлетворяют равенствам $x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 = x_2^2 - x_2x_3 + x_3^2 = x_3^2 - x_3x_4 + x_4^2 = \ldots = x_{2008}^2 - x_{2008}x_{2009} + x_{2009}^2 = x_{2009}^2 - x_{2009}x_1 + x_1^2$. Докажите, что числа $x_1, x_2, \ldots, x_{2009}$ равны.

10.8. На вечеринке компанию из 20 человек требуется усадить за 4 стола. Рассадка называется *удачной*, если любые два человека, оказавшиеся за одним столом, являются друзьями. Выяснилось, что удачные рассадки существуют, причем при любой удачной рассадке за каждым столом сидят ровно по 5 человек. Каково наибольшее возможное количество пар друзей в этой компании?

XXXV Всероссийская математическая олимпиада школьников

10 класс

Второй день

10.5. Натуральное число m таково, что сумма цифр в десятичной записи числа 2^m равна 8. Может ли при этом последняя цифра числа 2^m быть равной 6?

10.6. Вписанная в треугольник ABC окружность ω касается сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. На продолжении отрезка AA_1 за точку A взята точка D такая что $AD = AC_1$. Прямые DB_1 и DC_1 пересекают второй раз окружность ω в точках B_2 и C_2. Докажите, что B_2C_2 — диаметр окружности ω.

10.7. Положительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_{2009}$ удовлетворяют равенствам $x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 = x_2^2 - x_2x_3 + x_3^2 = x_3^2 - x_3x_4 + x_4^2 = \ldots = x_{2008}^2 - x_{2008}x_{2009} + x_{2009}^2 = x_{2009}^2 - x_{2009}x_1 + x_1^2$. Докажите, что числа $x_1, x_2, \ldots, x_{2009}$ равны.

10.8. На вечеринке компанию из 20 человек требуется усадить за 4 стола. Рассадка называется *удачной*, если любые два человека, оказавшиеся за одним столом, являются друзьями. Выяснилось, что удачные рассадки существуют, причем при любой удачной рассадке за каждым столом сидят ровно по 5 человек. Каково наибольшее возможное количество пар друзей в этой компании?

11 класс

Второй день

11.5. На плоскости провели несколько прямых и отметили все их точки пересечения. Сколько прямых могло быть проведено, если на одной из проведенных прямых отмечена одна точка, на другой — три, а на третьей — пять? Найдите все возможные варианты и докажите, что других нет.

11.6. Точка D на стороне BC остроугольного треугольника ABC такова, что $AB = AD$. Окружность, описанная около треугольника ABD, пересекает сторону AC в точках A и K. Прямая DK пересекает перпендикуляр, опущенный из B на AC, в точке L. Докажите, что $CL = BC$.

11.7. Даны натуральные числа a, b, c, взаимно простые в совокупности. Верно ли, что обязательно существует такое натуральное n, что число $a^k + b^k + c^k$ не делится на 2^n ни при одном натуральном k?

11.8. По кругу стоят 11 натуральных чисел. Известно, что любые два соседних числа различаются хотя бы на 20, а сумма любых двух соседних чисел не меньше ста. Найдите минимальную возможную сумму всех чисел.

XXXV Всероссийская математическая олимпиада школьников

11 класс

Второй день

11.5. На плоскости провели несколько прямых и отметили все их точки пересечения. Сколько прямых могло быть проведено, если на одной из проведенных прямых отмечена одна точка, на другой — три, а на третьей — пять? Найдите все возможные варианты и докажите, что других нет.

11.6. Точка D на стороне BC остроугольного треугольника ABC такова, что $AB = AD$. Окружность, описанная около треугольника ABD, пересекает сторону AC в точках A и K. Прямая DK пересекает перпендикуляр, опущенный из B на AC, в точке L. Докажите, что $CL = BC$.

11.7. Даны натуральные числа a, b, c, взаимно простые в совокупности. Верно ли, что обязательно существует такое натуральное n, что число $a^k + b^k + c^k$ не делится на 2^n ни при одном натуральном k?

11.8. По кругу стоят 11 натуральных чисел. Известно, что любые два соседних числа различаются хотя бы на 20, а сумма любых двух соседних чисел не меньше ста. Найдите минимальную возможную сумму всех чисел.