# САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2009 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ

## I тур. 6 класс.

**1.** Вдоль дороги в ряд стоят 5 домов, в каждом живет хотя бы один человек, и при этом в любых двух разных домах живет разное число людей. Два жителя называются соседями, если они живут в одном доме или в соседних домах. Приведите пример, когда *у каждого* жителя либо ровно 20, либо ровно 30 соседей. (*О. Иванова*)

**2.** Из бумажного квадрата $10 \times 10$ клеток вырезали по клеточкам несколько квадратов, причем любые два из них имеют разные размеры. Какое наибольшее количество квадратов могло быть вырезано? Поясните, почему нельзя вырезать большее число квадратов. (*В. Франк*)

**3.** На доске написаны числа 1, 2, 4, 8. Разрешается умножить любое число на 3 и результат записать на доску вместо исходного числа; либо прибавить 1 к любым двум числам на доске и записать полученные числа вместо исходных. Можно ли в результате этих операций получить 4 числа, произведение которых будет равно 200720082009? (*Жюри*)

**4.** В справочнике “Юный Арифмометр” напечатаны все натуральные числа от 1 до 300 000. Владик выписал из справочника все числа, в записи которых встречается фрагмент “23” (двойка, за которой сразу же стоит тройка). А Саша выписал из справочника все числа, в записи которых встречается фрагмент “34”. Кто из мальчиков выписал больше чисел? (*В. Франк*)

# САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2009 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ

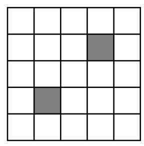
## I тур. 7 класс.

**1.** Вдоль дороги в ряд стоят 5 домов, в каждом живет хотя бы один человек, и при этом в любых двух разных домах живет разное число людей. Два жителя называются соседями, если они живут в одном доме или в соседних домах. Приведите пример, когда у *каждого* жителя либо ровно 20, либо ровно 30 соседей. (*О. Иванова*)

**2.** Из бумажного прямоугольника $12 \times 20$ клеток вырезали по клеточкам несколько квадратов, причем любые два из них имеют разные размеры. Какое наибольшее количество квадратов могло быть вырезано? Поясните, почему нельзя вырезать большее число квадратов. (*В. Франк*)

**3.** Маленькая настоящая жемчужина весит в 5 раз меньше, чем большая фальшивая, а сто́ит в 7 раз больше. Куча жемчуга весит столько же, сколько весят 170 больших фальшивых жемчужин, а стоит столько, сколько стоят 170 маленьких настоящих. Сколько больших фальшивых жемчужин в этой куче? (*К. Кохась*)

**4.** В таблице $5 \times 5$ расставлены числа от 1 до 25. Разрешается поменять местами числа, находящиеся в соседних клетках в одной строке, если правое больше левого. Аналогично, разрешается поменять местами числа в соседних клетках в одном столбце, если нижнее больше верхнего. Докажите, что с помощью этих операций нельзя получить таблицу, в которой расстановка чисел отличается от исходной лишь тем, что числа в закрашенных клетках поменялись местами.



# САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2009 года ПО МАТЕМАТИКЕ

## I тур. 8 класс.

**1.** Из пяти миллионов болотных кикимор 30 процентов любят тяжелый рок. В то же время, тяжелый рок любят 90 процентов из десяти миллионов писаных красавиц. Докажите, что писаными красавицами является не более половины всех болотных кикимор.

**2.** В ряд стоит 50 человек, все разного роста. Ровно 15 из них выше своего левого соседа. Сколько человек выше своего правого соседа? Приведите все варианты и докажите, что других нет. (*С. Берлов*)

**3.** На сторонах $BC$ и $AB$ треугольника $ABC$ нашлись точки $L$ и $K$ соответственно, такие что $AL$ — биссектриса угла $BAC$, $\angle ACK = \angle ABC$, $\angle CLK = \angle BKC$. Докажите, что $AC = KB$.

**4.** Петя поделил с остатком натуральное число на сумму его цифр. И неполное частное, и остаток оказались у Пети равны 2008. Учительница поставила Пете двойку. Докажите, что учительница права.

**5.** Докажите для чисел $a$, $b$, $c$, больших 1, неравенство

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\left|\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right|+\left|\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right|+\left|\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right| \leq a+b+c.$$

# САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
# ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2009 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
## I тур. 9 класс.

---

**1.** Приведите пример четырех натуральных чисел $a$, $b$, $c$ и $d$, имеющих одинаковую сумму цифр, и таких, что $a+b+c+d=2009$.

**2.** Незнайка расставил в таблице $10 \times 10$ числа от 1 до 100. С этой таблицей разрешается проделывать следующие операции.

1) Выбрать две соседние клетки в одной строке и, если левое число больше правого, поменять эти числа местами.

2) Выбрать две соседние клетки в одном столбце и, если нижнее число больше верхнего, поменять эти числа местами.

Незнайка утверждает, что из его расстановки с помощью описанных операций можно получить любую другую расстановку чисел от 1 до 100 в этой таблице. Докажите, что он ошибается.

**3.** На сторонах $AB$ и $BC$ треугольника $ABC$ выбраны точки $K$ и $L$ соответственно. Оказалось, что $BL = CK$ и $\angle BKC = \angle CLK$. Кроме того прямая $AC$ касается окружности, описанной около треугольника $BCK$. Докажите, что $AL$ — биссектриса угла $BAC$.

**4.** Сумма чисел $a_1$, $a_2$, …, $a_{2009}$ равна нулю. Известно, что

$$|a_1 - 2a_2| = |a_2 - 2a_3| = \ldots = |a_{2008} - 2a_{2009}| = |a_{2009} - 2a_1|.$$

Докажите, что $a_1 = a_2 = \ldots = a_{2009} = 0$. *(А. Храбров)*

**5.** Натуральное число $n$ дает остаток 4 при делении на 9. Докажите неравенство $\{\sqrt[3]{n}\} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$. Здесь через $\{x\}$ обозначена дробная часть числа $x$, т. е. $\{x\} = x - [x]$, где $[x]$ — целая часть числа $x$. *(А. Храбров)*

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2009 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 10 класс.

---

**1.** В ряд стоит 50 человек, все разного роста. Ровно 15 из них выше своего левого соседа. Сколько человек выше своего правого соседа? Приведите все варианты и докажите, что других нет. (*С. Берлов*)

**2.** Александр умножил шестизначное число $\overline{abcdef}$ на число $\overline{def}$, а Кирилл умножил шестизначное число $\overline{defabc}$ на $\overline{abc}$. Сумма их результатов оказалась равна 200802007. Докажите, что в их вычислениях есть ошибка.

**3.** Сумма чисел $a_1$, $a_2$, …, $a_{2009}$ равна нулю. Известно, что

$$|a_1 - 2a_2| = |a_2 - 2a_3| = \ldots = |a_{2008} - 2a_{2009}| = |a_{2009} - 2a_1|.$$

Докажите, что $a_1 = a_2 = \ldots = a_{2009} = 0$. (*А. Храбров*)

**4.** Внутри трапеции $ABCD$ $(BC \parallel AD)$ выбрана точка $M$ так, что $\angle AMB = \angle CMD = 90^\circ$, $\angle BAM + \angle CDM = \angle BMC$. Докажите, что трапеция $ABCD$ — описанная. (*А. Смирнов*)

**5.** В таблице $10 \times 10$ расставлены числа от 1 до 100. Разрешается поменять местами числа, находящиеся в соседних клетках в одной строке, если левое больше правого. Разрешается поменять местами числа в соседних клетках в одном столбце, если нижнее больше верхнего. Можно ли для какой-нибудь расстановки чисел с помощью этих операций получить таблицу, в которой расстановка чисел симметрична исходной расстановке относительно диагонали, идущей из левого нижнего угла в правый верхний?

# САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2009 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
## I тур. 11 класс.

**1.** Петя поделил с остатком натуральное число на сумму его цифр. И неполное частное, и остаток оказались у Петя равны 2008. Учительница поставила Пете двойку. Докажите, что учительница права.

**2.** Известно, что

$$|a_1 - 2a_2| = |a_2 - 2a_3| = \ldots = |a_{2008} - 2a_{2009}| = |a_{2009} - 2a_1| = 100\,.$$

Докажите, что сумма чисел $a_1$, $a_2$, ..., $a_{2009}$ не равна нулю. (*А. Храбров*)

**3.** Докажите, что для всех $\alpha$, при которых определена левая часть, верно неравенство

$$\operatorname{tg}^4 \alpha + \operatorname{ctg}^4 \alpha \geq 2(\sin^3(\alpha^2) - \cos^3(\alpha^2))\,.$$

(*А. Пастор*)

**4.** Внутри трапеции $ABCD$ $(BC \parallel AD)$ нашлась такая точка $P$, что $\angle APB = \angle CPD = 90°$, $\angle ABP = 20°$, $\angle DCP = 50°$ и $\angle APD = 70°$. Докажите, что в трапецию $ABCD$ можно вписать окружность.

(*А. Смирнов*)

**5.** В таблице $10 \times 10$ расставлены числа от 1 до 100. Разрешается поменять местами числа, находящиеся в соседних клетках в одной строке, если левое больше правого. Разрешается поменять местами числа в соседних клетках в одном столбце, если нижнее больше верхнего. Можно ли для какой-нибудь расстановки чисел с помощью этих операций получить таблицу, в которой расстановка чисел симметрична исходной расстановке относительно диагонали, идущей из левого нижнего угла в правый верхний?