САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2009 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 6 класс.

1. Владик расставил в клетках квадрата 3×3 числа $1, 2, \ldots, 9$ (каждое по одному разу), а затем посчитал суммы в каждой строчке, в каждом столбце и в каждой из двух диагоналей. Могли ли эти 8 сумм оказаться равными $13, 14, \ldots, 20$? *(В. Франк)*

2. На прямой отмечены 100 точек, некоторые из них красные, некоторые синие, а остальные — зеленые. Известно, что между любыми двумя красными точками есть синяя, а между любыми двумя синими есть зеленая. Кроме того, красных точек не меньше, чем синих, а синих — не меньше, чем зеленых. Сколько точек покрашено в синий цвет? *(С. Берлов)*

3. На уроке физкультуры выстроились в ряд 15 мальчиков и 15 девочек, каждый из 30 детей держал в руках по мячику. Учитель велел каждому мальчику передать свой мяч соседу справа, а каждой девочке — соседу слева. При этом половина детей выполнила команду правильно, а остальные перепутали и отдали мяч соседу с другой стороны. Докажите, что кто-то остался без мяча. *(С. Берлов)*

4. В магазине продаются три вида наборов “Юный техник”. В одном наборе 2 винтика и 6 шпунтиков, в другом — 6 винтиков и 3 шпунтиков, а в третьем — 13 винтиков и 4 шпунтика. Чтобы собрать паровозик, нужно 4 винтика и 2 шпунтика. Вася купил несколько наборов и собрал несколько паровозиков. Докажите, что у него не могли остаться неиспользованными ровно 1 винтик и ровно 1 шпунтик. *(С. Иванов)*

. . . .

Олимпиада 2009 года. II тур. 6 класс. Выводная аудитория.

5. В школе учатся 298 детей. Все дети имеют разный вес, а также разный рост. Известно, что каких бы 150 детей ни взять, самый высокий из них окажется одновременно и самым тяжелым из них. Докажите, что можно так выбрать 150 детей, чтобы самый низкий из них оказался одновременно и самым легким из них.

6. В равенстве

$$\text{ПЕТР} \cdot \text{ИВАНОВ} - \text{ИВАН} \cdot \text{ПЕТРОВ} = 2009$$

одинаковые цифры обозначены одинаковыми буквами, а разные — разными. Чему может быть равно число ИВАН? Приведите все возможные ответы и докажите, что других нет. *(К. Кноп)*

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2009 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
II ТУР. 7 КЛАСС.

---

1. На прямой отмечены 100 точек, некоторые из них красные, некоторые синие, а остальные — зеленые. Известно, что между любыми двумя красными точками есть синяя, а между любыми двумя синими есть зеленая. Кроме того, красных точек не меньше, чем синих, а синих — не меньше, чем зеленых. Сколько точек покрашено в синий цвет? (*С. Берлов*)

2. На уроке физкультуры выстроились в ряд 15 мальчиков и 15 девочек, каждый из 30 детей держал в руках по мячику. Учитель велел каждому мальчику передать свой мяч соседу справа, а каждой девочке — соседу слева. При этом половина детей выполнила команду правильно, а остальные перепутали и отдали мяч соседу с другой стороны. Докажите, что кто-то остался без мяча. (*С. Берлов*)

3. В равенстве

$$\text{ПЕТР} \cdot \text{ИВАНОВ} - \text{ИВАН} \cdot \text{ПЕТРОВ} = 2009$$

одинаковые цифры обозначены одинаковыми буквами, а разные — разными. Докажите, что О $= 4$. (*К. Кноп*)

4. Точка M — середина стороны AC треугольника ABC. Точка D на стороне BC такова, что $\angle BMA = \angle DMC$. Оказалось, что $CD + DM = BM$. Докажите, что $\angle ACB + \angle ABM = \angle BAC$. (*С. Берлов*)

. . . .

Олимпиада 2009 года. II тур. 7 класс. Выводная аудитория.

5. В магазине продаются три вида наборов “Юный техник”. В одном наборе 4 винтика и 5 шпунтиков, в другом 5 винтиков и 8 шпунтиков, в третьем 8 винтиков и 3 шпунтика. Чтобы собрать паровозик, нужно 3 винтика и 2 шпунтика. Вася купил несколько наборов, собрал несколько паровозиков. Докажите, что у него не могли остаться неиспользованными ровно 1 винтик и ровно 1 шпунтик. (*С. Иванов*)

6. Если в детектор фальшивых монет опустить 5 монет весом a, b, c, d, e граммов, где $a < b < c < d < e$, то он, пожужжав, сбросит монеты весом b и c граммов в правую чашу, а остальные монеты — в левую. Есть 50 монет попарно различных по весу. Они пронумерованы и легко различаются по внешнему виду. Как при помощи детектора определить самую легкую монету? (*Д. Карпов*)

7. Федя выписывает делители некоторого составного числа по возрастанию, начиная с 1, пока не встретится составной делитель (например, для числа 45 он выпишет 1, 3, 5, 9). Оказалось, что каждый следующий делитель на k больше предыдущего. Докажите, что $k = 1$ или 2. (*Ф. Петров*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2009 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ

II тур. 8 класс.

1. Можно ли из всех 10 цифр, используя каждую по одному разу, составить два пятизначных числа так, чтобы одно из них делилось на другое?

2. В магазине продаются три вида наборов “Юный техник”. В одном наборе 4 винтика и 5 шпунтиков, в другом — 5 винтиков и 8 шпунтиков, а в третьем — 8 винтиков и 3 шпунтика. Чтобы собрать паровозик, нужно 3 винтика и 2 шпунтика. Вася купил несколько наборов и собрал несколько паровозиков. Докажите, что у него не могли остаться неиспользованными ровно 1 винтик и ровно 1 шпунтик.

(*С. Иванов*)

3. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны и пересекаются в точке O, причем $BC = AO$. Точка F такова, что $CF \perp CD$ и $CF = BO$. Докажите, что треугольник ADF — равнобедренный. (*Ф. Бахарев*)

4. Федя выписывает делители некоторого составного числа по возрастанию, начиная с 1, пока не встретится составной делитель (например, для числа 45 он выпишет 1, 3, 5, 9). Оказалось, что каждый следующий делитель на k больше предыдущего. Докажите, что $k = 1$ или 2. (*Ф. Петров*)

. . . .

Олимпиада 2009 года. II тур. 8 класс. Выводная аудитория.

5. Различные вещественные числа a, b и c таковы, что

$$a = ab + c, \quad b = bc + a, \quad c = ca + b\,.$$

Найдите $a + b + c$. (*Ф. Петров*)

6. На плоскости нарисован правильный 19-угольник. Циркулем и линейкой постройте правильный 57-угольник. (*Ф. Петров*)

7. На доске в ряд выписаны числа от 1 до 2009 в порядке возрастания. За ход можно либо увеличить на 1 любое из чисел кроме максимального, либо стереть два одинаковых числа вместе со всеми числами, стоящими между ними. Влад и Марьяна делают ходы по очереди, начинает Влад. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?