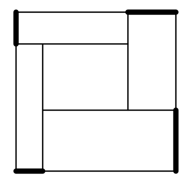
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2006 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
I ТУР. 6 КЛАСС.

---

1. Расставьте 8 минусов и 17 плюсов в клетках квадрата 5×5 так, чтобы рядом с каждым минусом (т. е. в клетках соседних по стороне) было ровно 2 плюса. (*Ф. Бахарев*)

2. Квадрат со стороной 4 м разрезан на прямоугольники так, как показано на рисунке. Сумма длин жирных отрезков равна 2 м. Найдите периметр внутреннего прямоугольника. Не забудьте обосновать свой ответ. (*Ф. Бахарев*)



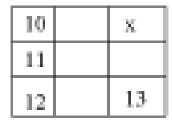
3. У 10 девочек было по 10 конфет. Каждая девочка подарила несколько конфет другим (конфеты, полученные в подарок, девочки оставляют себе). В результате у всех девочек оказалось разное число конфет. Докажите, что какая-то из девочек подарила конфет не меньше, чем у нее их оказалось в конце.
(*по мотивам задачи А. Храброва*)

4. Костя написал два числа, не содержащих в записи нулей, и заменил цифры буквами (разные цифры — разными буквами). Оказалось, что число КРОКОДИЛЛЛ делится на 312. Докажите, что число ГОРИЛЛА не делится на 392. (*К. Кохась*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2006 года ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 7 класс.

---

1. Прямоугольник разбит на 9 меньших прямоугольников. Периметры четырех из них указаны на рисунке. Чему равен периметр прямоугольника x?



(*О. Ванюшина, К. Кохась*)

2. Каждый из семи фальшивомонетчиков изготовил по 31 монете: 20 монет по 6 рублей, 10 — по 1 рублю и 1 монету в 5 рублей. Любые двое могут меняться монетами так, чтобы у каждого оставалась такая же сумма денег. Могут ли в результате таких обменов все монеты по 1 рублю оказаться у одного фальшивомонетчика? Не забудьте обосновать свой ответ. (*О. Ванюшина*)

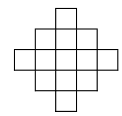
3. У 10 девочек было по 10 конфет. Каждая девочка подарила несколько конфет другим (конфеты, полученные в подарок, девочки оставляют себе). В результате у всех девочек оказалось разное число конфет. Докажите, что какая-то из девочек подарила конфет не меньше, чем у нее их оказалось в конце. (*по мотивам задачи А. Храброва*)

4. Костя написал два числа, не содержащих в записи нулей, и заменил цифры буквами (разные цифры — разными буквами). Оказалось, что число КРОКОДИЛЛЛ делится на 312. Докажите, что число ГОРИЛЛА не делится на 392. (*К. Кохась*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2006 года ПО МАТЕМАТИКЕ

I тур. 8 класс.

1. Расставьте числа в клетках изображенной на рисунке фигуры так, чтобы в любом прямоугольнике из трех клеток сумма чисел была равна 1, и сумма всех чисел была равна 1. (Достаточно привести один пример.) (*Ф. Бахарев*)



2. Двоечник Вася складывает дроби, прибавляя числитель к числителю, а знаменатель — к знаменателю. Однажды он сложил две правильные несократимые дроби и получил ответ, который ровно в два раза меньше истинного. Какие дроби складывал Вася, если известно, что они различны и одна из них равна $\frac{1}{6}$? (Найдите все варианты и докажите, что других нет.) (*С. Иванов*)

3. Точки P и Q — середины оснований AD и BC трапеции $ABCD$ соответственно. Оказалось, что $AB = BC$, а точка P лежит на биссектрисе угла B. Докажите, что $BD = 2PQ$. (*С. Берлов*)

4. Даны шесть чисел. Сумма любых пяти из них больше 900, но меньше 1000. Докажите, что все данные числа больше 100.

(*А. Железняк, С. Иванов*)

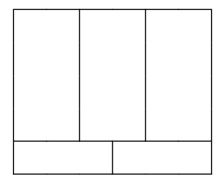
5. В шахматном турнире участвовали 20 шахматистов. Каждые два участника сыграли друг с другом ровно одну партию. За победу давалось 1 очко, за ничью давалось 1/2 очка, за поражение — 0 очков. В итоге все шахматисты набрали разное число очков. Докажите, что есть участник, у которого количество побед больше, чем количество ничьих.

(*А. Храбров*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2006 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 9 класс.

---

1. Квадрат разбит на пять прямоугольников так, как показано на рисунке. (У двух нижних прямоугольников горизонтальная сторона больше вертикальной, у трех верхних — наоборот.) У всех прямоугольников отношение большей стороны к меньшей равно одному и тому же числу. Найдите это число. (*К. Кохась*)



2. Докажите, что ни при каком вещественном $a > 0$ число $[100a] + [71a]$ не может иметь вид $171k + 170$, где k — натуральное число. (Через $[x]$ обозначается целая часть x, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x.) (*жюри*)

3. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $AB = BC$ и $AD = DC$. На диагонали AC нашлась такая точка K, что $AK = BK$ и четырехугольник $KBCD$ вписанный. Докажите, что $BD = CD$.

(*Ф. Бахарев, Д. Ростовский*)

4. 16-значное число a делится на 999 999 999. Докажите, что никакое натуральное 16-значное число, которое можно получить из a перестановкой цифр, не может делиться на 100 000 001. (*В. Франк*)

5. В шахматном турнире участвовали 20 шахматистов. Каждые два участника сыграли друг с другом ровно одну партию. За победу давалось 1 очко, за ничью давалось 1/2 очка, за поражение — 0 очков. В итоге все шахматисты набрали разное число очков. Докажите, что есть участник, у которого количество побед больше, чем количество ничьих.

(*А. Храбров*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2006 года ПО МАТЕМАТИКЕ

I тур. 10 класс.

---

1. Докажите, что квадрат можно разрезать на шесть прямоугольников, у каждого из которых отношение большей стороны к меньшей равно $2+\sqrt{2}$. (*К. Кохась*)

2. Дана возрастающая положительная геометрическая прогрессия b_n. Известно, что

$$b_4 + b_3 - b_2 - b_1 = 5\,.$$

Докажите, что $b_6 + b_5 \geq 20$. (*С. Берлов, Д. Ростовский*)

3. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $AB = BC$ и $AD = DC$. На диагонали AC нашлась такая точка K, что $AK = BK$ и четырехугольник $KBCD$ вписанный. Докажите, что $BD = CD$.

(*Ф. Бахарев, Д. Ростовский*)

4. В шахматном турнире участвовали 20 шахматистов. Каждые два участника сыграли друг с другом ровно одну партию. За победу давалось 1 очко, за ничью давалось $1/2$ очка, за поражение — 0 очков. В итоге все шахматисты набрали разное число очков. Докажите, что есть участник, у которого количество побед больше, чем количество ничьих.

(*А. Храбров*)

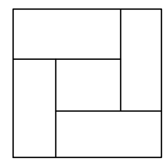
5. Дано 39-значное натуральное число A. Докажите, что существует такое 20-значное число B, что ни одно 39-значное натуральное число, получающееся из A перестановкой его цифр, не делится на B.

(*В. Франк*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2006 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 11 класс.

---

1. Квадрат разбит на пять прямоугольников так, как показано на рисунке. У всех четырех окаймляющих прямоугольников отношение большей стороны к меньшей равно одному и тому же числу. Докажите, что центральный прямоугольник — квадрат. (*Ф. Бахарев*)



2. Дима написал арифметическую прогрессию из пяти чисел, принадлежащих промежутку $[-2\pi/3, 2\pi/3]$. Оказалось, что сумма синусов первого и четвертого ее членов равна сумме косинусов второго и пятого членов. Чему может быть равен третий член прогрессии? (Найдите все варианты и докажите, что других нет.) (*Ф. Петров*)

3. В шахматном турнире участвовали 20 шахматистов. Каждые два участника сыграли друг с другом ровно одну партию. За победу давалось 1 очко, за ничью давалось 1/2 очка, за поражение — 0 очков. В итоге все шахматисты набрали разное число очков. Докажите, что есть участник, у которого количество побед больше, чем количество ничьих.

(*А. Храбров*)

4. На какие цифры не может оканчиваться натуральное число

$$[x] + [3x] + [6x]\,,$$

если $x > 0$ — вещественное число? (Через $[x]$ обозначается целая часть x, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x.) (*жюри*)

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle CBD = \angle CAB$, $\angle ACD = \angle ADB$. Докажите, что из отрезков BC, AD, AC можно сложить прямоугольный треугольник. (*А. Смирнов*)