САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2006 года ПО МАТЕМАТИКЕ

II тур. 6 класс.

---

1. Директор поручил Александру Владимировичу купить к Новому году 1 торт, 3 бутылки шампанского и 20 хрустальных фужеров. Вместо этого Александр Владимирович купил ровно на те же деньги 1 фужер, 3 торта и 20 бутылок шампанского. Известно, что торт дешевле бутылки шампанского. Что стоит дороже: бутылка шампанского или фужер? (*А. Железняк*)

2. На доске было написано число 141. Каждую минуту у написанного на доске числа перемножают все цифры и полученное произведение либо прибавляют к числу, либо вычитают из него (а результат записывают на доску вместо исходного числа). Докажите, что число 141 больше никогда не появится на доске.

3. Саша и Федя написали на 1000 карточках числа от 0 до 999, после чего разделили карточки между собой. Каждый из них выложил свои карточки в ряд и получил длинное число. Могут ли длинные числа у Саши и Феди совпасть? (*Ф. Бахарев*)

4. У каждого марсианина три руки и несколько антенн. Каждый марсианин взял за руки трех других (так что все руки оказались заняты). Оказалось, что у любых двух из марсиан, взявшихся за руки, количество антенн отличается ровно в 6 раз. Может ли суммарное количество антенн у марсиан быть ровно 2006? (*Ф. Бахарев*)

. . . .

Олимпиада 2006 года. II тур. 6 класс. Выводная аудитория.

5. Существует ли натуральное число $N > 20062006$, такое что все натуральные делители числа N можно разбить на две группы с равными суммами? (*по мотивам задачи О. Ванюшиной*)

6. Игроки по очереди ставят королей на шахматную доску: первый игрок — белых королей, второй игрок — черных. Запрещается ставить своего короля под бой короля противника. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре? (*С. Берлов*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2006 года ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 7 класс.

1. Директор поручил Александру Владимировичу купить к Новому году 1 торт, 3 бутылки шампанского и 20 хрустальных фужеров. Вместо этого Александр Владимирович купил ровно на те же деньги 1 фужер, 3 торта и 20 бутылок шампанского. Известно, что торт дешевле бутылки шампанского. Что стоит дороже: бутылка шампанского или фужер? (*А. Железняк*)

2. Вася и Петя написали на 2006 карточках числа от 0 до 2005, после чего разделили карточки между собой. Каждый из них выложил свои карточки в ряд и получил длинное число. Докажите, что длинные числа у Васи и Пети не совпадают. (*Ф. Бахарев*)

3. У каждого марсианина три руки и несколько антенн. Каждый марсианин взял за руки трех других (так что все руки оказались заняты). Оказалось, что у любых двух из марсиан, взявшихся за руки, количество антенн отличается ровно в 6 раз. Может ли суммарное количество антенн у марсиан быть ровно 2006? (*Ф. Бахарев*)

4. Вася написал число, увидел, что оно делится на свою последнюю цифру, и поделил на нее. Оказалось, что полученное число тоже делится на свою последнюю цифру, и Вася опять на нее поделил и т. д. После 100 делений Вася получил 1, причем до этого все результаты делений были больше 1. Какое число у него могло быть вначале? (Найдите все возможные ответы и докажите, что других нет.) (*О. Ванюшина*)

. . . .

Олимпиада 2006 года. II тур. 7 класс. Выводная аудитория.

5. AL — биссектриса угла A треугольника ABC (точка L лежит на стороне BC). Оказалось, что $AL = LB$. На луче AL отложен отрезок AK, равный CL. Докажите, что $AK = CK$.

6. Дана таблица, заполненная цифрами 1, 2, 3, 4. В ней произвольным образом переставляют строки. Потом произвольным образом переставляют столбцы. И наконец, все цифры обозначают буквами (разные цифры — разными буквами). Может ли с помощью таких операций из первой таблицы получиться вторая? (*С. Дужин*)

1	2	3	4	1	2	3	4
2	3	4	1	2	3	4	1
3	4	1	2	3	4	1	2
4	1	2	3	4	1	2	3
1	2	3	4	1	2	3	4
2	3	4	1	2	3	4	1
3	4	1	2	3	4	1	2
4	1	2	3	4	1	2	3

a	b	c	d	a	b	c	d
b	a	d	c	b	a	d	c
c	d	a	b	c	d	a	b
d	c	b	a	d	c	b	a
a	b	c	d	a	b	c	d
b	a	d	c	b	a	d	c
c	d	a	b	c	d	a	b
d	c	b	a	d	c	b	a

7. Игроки по очереди ставят королей на шахматную доску: первый игрок — белых королей, второй игрок — черных. Запрещается ставить своего короля под бой короля противника. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре? (*С. Берлов*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2006 года ПО МАТЕМАТИКЕ

II тур. 8 класс.

1. В треугольнике ABC угол A в два раза больше угла B, AL — биссектриса угла A (точка L лежит на стороне BC). На луче AL отложен отрезок AK, равный CL. Докажите, что $AK = CK$.

2. В ряд выписаны 100 положительных чисел. При этом выполняется такое свойство: если числа a, b, c стоят подряд в этом ряду (именно в таком порядке), то $b = \frac{2ac}{a+c}$. Известно, что первое число равно 1, а последнее равно 2. Найдите второе число в ряду. (*К. Кохась*)

3. На доске было написано число 312. Каждую минуту у написанного на доске числа перемножают все цифры и полученное произведение либо прибавляют к числу, либо вычитают из него (а результат записывают на доску вместо исходного числа). Докажите, что число 312 больше никогда не появится на доске.

4. Дед Мороз подарил каждому из 102 детей по 100 конфет. Конфеты бывают трех видов: красные, синие и зеленые. Докажите, что найдутся двое, чьи наборы конфет либо полностью одинаковы, либо полностью различны. (Два набора конфет считаются полностью одинаковыми, если в них поровну конфет каждого вида, и полностью различными, если никакого вида конфет в них не поровну.)

(*О. Ванюшина*)

. . . .

Олимпиада 2006 года. II тур. 8 класс. Выводная аудитория.

5. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC на стороне AB взята такая точка E, что $\frac{AE}{BE} = \frac{AD}{BC}$. Точка H — проекция D на прямую CE. Докажите, что $AH = AD$.

(*А. Смирнов*)

6. Два игрока по очереди ставят королей на шахматную доску: первый игрок — белых королей, второй игрок — черных. Запрещается ставить своего короля под бой короля противника. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре? (*С. Берлов*)

7. Докажите, что все натуральные делители числа $100\ldots000$ (35 нулей), включая единицу и само число, можно разбить на две группы, в которых одинаковы количества делителей и их суммы. (*О. Ванюшина*)