САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2004 года ПО МАТЕМАТИКЕ

II тур. 6 класс.

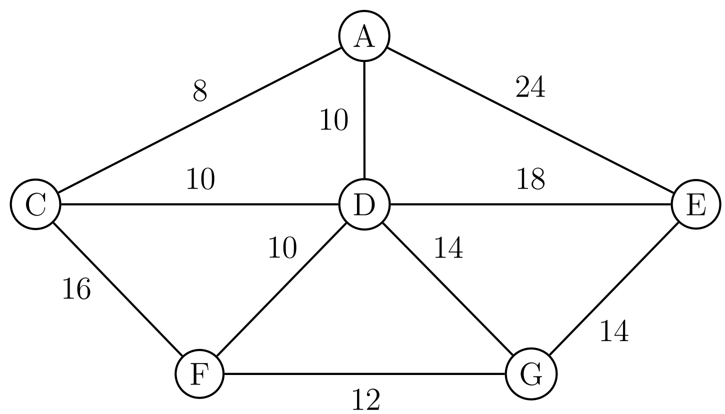
---

1. У Винни-Пуха есть 8 горшков меда весом 1, 2, 3, ..., 8 кг (на каждом горшке написан его вес), причем в один из горшков ему подложили кусочек сыра весом 1 кг. Как при помощи двух взвешиваний на чашечных весах без гирь найти горшок с сыром?

2. Город называется большим северным, если при сравнении с каждым из остальных городов оказывается, что он или больше или севернее (или и то, и другое). Аналогично определяется малый южный город. В Тридевятом царстве все города, кроме Задворска, являются и большими северными и малыми южными одновременно. Докажите, что Задворск — тоже большой северный и при этом также малый южный город. (*С. Ягунов, Е. Абакумов, К. Кохась*)

3. На медосмотр пришли мальчики весом 39 кг и девочки весом 40 кг, всего не более 50 человек. Накануне они грозились принести на медосмотр своих хомячков (каждый хомяк весит 1 кг). На медосмотре выяснилось, что мальчики весят в сумме столько же, сколько девочки. Докажите, что либо кто-то из мальчиков принес хомячка, либо девочки принесли как минимум 15 хомячков. (*К. Сухов*)

4. На карте изображены шесть населенных пунктиков и дороги между ними. Возле каждой дороги указана ее длина в километрах. Из пунктика A выехал автобус, проехал 2222 км и при этом оказался опять в A. Докажите, что автобус хотя бы раз проезжал по дороге EG.



(*К. Кохась, Р. Семизаров*)

...

Олимпиада 2004 года. II тур. 6 класс. Выводная аудитория.

5. Дано натуральное число n. Разрешается стереть в имеющемся числе две цифры, стоящие рядом и отличающиеся на 1 (например, из 245984 можно получить 2984 или 2454). Дима произвел несколько таких операций и получил из числа n число 611, а Саша при помощи нескольких операций получил из n число 556. Докажите, что n содержит хотя бы две цифры “6”. (*О. Ванюшина*)

6. Два миллионера играют в следующую игру. На столе вначале игры лежит 1000 кучек по одной спичке в каждой. Игрок может за один ход сложить любые две кучки спичек вместе, при этом противник дает ему столько рублей, сколько было спичек в бо́льшей кучке. Выигрывает тот, кто в конце игры (когда все кучки сольются в одну) получит прибыль. Кто выиграет при правильной игре и какой наибольший выигрыш он может себе обеспечить? (*В. Франк*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2004 года ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 7 класс.

1. На складе стояли бочонки с медом весом 1000, 1001, …, 2004 грамма, причем на каждом бочонке был написан его вес. На склад залетели несколько шмелей и утонули в бочонках (в одном бочонке могло утонуть несколько шмелей). Известно, что каждый шмель весит ровно 1 г. У кладовщика есть двухчашечные весы без гирь — они показывают, на какой из чашек лежит больший вес. Как ему при помощи нескольких взвешиваний на этих весах найти какой-нибудь бочонок, в котором утонул хотя бы один шмель?

2. Числа от 1 до 10 разбили на две группы по 5 чисел в каждой так, что произведение чисел в одной из групп делится на произведение чисел в другой. Какое наименьшее значение может быть у частного?

3. Можно ли так расставить в квадрате 2004×2004 натуральные числа, чтобы сумма чисел в 1-й строке была равна произведению чисел в 1-м столбце, сумма чисел во 2-й строке была равна произведению чисел во 2-м столбце, …, сумма чисел в 2004-й строке была равна произведению чисел в 2004-м столбце?

4. Два миллионера играют в следующую игру. На столе вначале игры лежит 1000 кучек по одной спичке в каждой. Игрок может за один ход сложить две кучки из a и b спичек вместе, при этом противник отдает ему $\max(a, b)$ рублей. Выигрывает тот, кто в конце игры (когда все кучки сольются в одну) получит положительную прибыль. Кто выиграет при правильной игре и какой наибольший выигрыш он может себе обеспечить? (*В. Франк*)

. . . .

Олимпиада 2004 года. II тур. 7 класс. Выводная аудитория.

5. 9 палок длиной по 1 м сломали на 17 частей каждую. Докажите, что найдутся 3 куска, из которых можно сложить треугольник.

6. Числа от 1 до 100 выписаны по порядку в вершинах стоугольника. Разрешается менять местами два соседних числа, если они имеют разную четность. После нескольких таких операций оказалось, что у каждого числа тот же левый сосед, что и в самом начале, и тот же правый сосед, что и в самом начале. Докажите, что либо все числа стоят на тех же местах, что и сначала, либо каждое число сдвинулось ровно на 50 вершин. (*О. Ванюшина*)

7. На стене написаны все натуральные числа от 900 000 000 до 1 200 000 000. У каждого из них выбрали делитель, меньший его самого. Докажите, что хотя бы два из этих делителей совпадают.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2004 года ПО МАТЕМАТИКЕ

II тур. 8 класс.

1. На складе стояли бочонки с медом весом 1000 г, 1001 г, ..., 2004 г, на каждом бочонке был написан его вес. На склад залетели несколько шмелей и утонули в бочонках (в одном бочонке могло утонуть несколько шмелей). Каждый шмель весит ровно 1 г. У кладовщика есть двухчашечные весы без гирь — они показывают, на какой из чашек лежит больший вес. Как ему при помощи нескольких взвешиваний на этих весах найти какой-нибудь бочонок, в котором утонул хотя бы один шмель?

2. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота CH. Оказалось, что $AH = BC$. Докажите, что биссектриса угла B, высота, опущенная из вершины A, и прямая, проходящая через точку H и параллельная стороне BC, пересекаются в одной точке. (*А. Смирнов*)

3. Дано натуральное число n. Разрешается стереть в имеющемся числе две цифры, стоящие рядом и отличающиеся на 1 (например, из 245984 можно получить 2984 или 2454). Дима произвел несколько таких операций и получил из числа n число 611, а Саша при помощи нескольких операций получил из n число 556. Докажите, что n содержит хотя бы две цифры “6”. (*О. Ванюшина*)

4. Про положительные числа x и y известно, что числа $x+\sqrt{y}$, $y+\sqrt{x}$ и $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ — целые. Докажите, что числа x и y — целые.

. . . .

Олимпиада 2004 года. II тур. 8 класс. Выводная аудитория.

5. Числа от 1 до 100 выписаны по порядку в вершинах стоугольника. Разрешается менять местами два соседних числа, если они имеют разную четность. После нескольких таких операций оказалось, что у каждого числа тот же левый сосед, что и в самом начале, и тот же правый сосед, что и в самом начале. Докажите, что либо все числа стоят на тех же местах, что и сначала, либо каждое число сдвинулось ровно на 50 вершин. (*О. Ванюшина*)

6. На продолжении стороны AC (за точку A) остроугольного треугольника ABC отмечена точка D, а на продолжении стороны BC (за точку C) отмечена точка E, причем $AD = CE$. Известно, что $2\angle A = \angle C$. Докажите, что $\angle CDE < (\angle ABD + \angle BAC)/2$. (*А. Смирнов*)

7. Дано натуральное число n. На доске выписаны все натуральные числа от $900\ldots00$ до $1200\ldots00$ (в обоих числах на концах n нулей). У каждого из них выбрали делитель, меньший его самого. Докажите, что хотя бы два из этих делителей совпадают.