САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2004 года ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 9 класс.

---

1. Учительница написала на доске 4 различных натуральных числа и попросила детей перемножить первые два и последние два. Но девочка Маша все перепутала и сложила первые два, а также последние два. При этом у нее получились такие же ответы, как у отличницы Кати. Какие числа написала не доске учительница?
(*Ф. Назаров*)

2. Дан остроугольный треугольник ABC. B_1, C_1 — основания высот из вершин B, C соответственно. Точка D — основание перпендикуляра из B_1 на AB, E — точка пересечения перпендикуляра, опущенного из из точки D на сторону BC, с отрезком BB_1. Докажите, что прямая EC_1 параллельна AC. (*А. Федотов*)

3. Дано 25-значное число без девяток в десятичной записи. Докажите, что можно увеличить на 1 две его одинаковые цифры так, чтобы полученное число не делилось на 7. (*К. Кохась*)

4. В квадрате 100×100 отмечены k клеток таким образом, что при любом разрезании квадрата по линиям сетки на два прямоугольника один из прямоугольников содержит хотя бы 100 отмеченных клеток. При каком наименьшем значении k это возможно? (*С. Иванов*)

. . . .

Олимпиада 2004 года. II тур. 9 класс. Выводная аудитория.

5. Три простых числа таковы, что произведение любых двух из них — точный квадрат, увеличенный на 6. Докажите, что сумма этих простых чисел — квадрат, увеличенный на 9. (*В. Франк, Ф. Петров*)

6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ на сторонах AB и BC нашлись точки K и L соответственно, такие что $\angle ADK = \angle CDL$. Отрезки AL и CK пересекаются в точке P. Докажите, что $\angle ADP = \angle BDC$. (*А. Смирнов*)

7. В клубе “Народные Богатства” состоят 15 олигархов, некоторые из которых являются между собой деловыми партнерами. Анализируя финансовые итоги 2003 г., Счетная палата отметила, что в начале года состояние каждого из членов клуба было не меньше четверти суммарного состояния всех его партнеров, а уже в декабре состояние каждого члена клуба стало меньше четверти суммарного состояния всех его партнеров. Докажите, что кто-то из олигархов завел в 2003 г. новые деловые контакты. (*С. Иванов*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2004 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 10 класс.

1. Дано несколько квадратных трехчленов. Каждый из них имеет два корня, а разность любых двух не имеет корней. Докажите, что сумма этих трехчленов имеет хотя бы один корень. (*С. Берлов, С. Иванов*)

2. Дано 25-значное число без девяток в десятичной записи. Докажите, что можно увеличить на 1 две его одинаковые цифры так, чтобы полученное число не делилось на 7. (*К. Кохась*)

3. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки K и L соответственно так, что $KB = LC$. Точка X симметрична K относительно середины стороны AC, точка Y симметрична L относительно середины стороны AB. Докажите, что прямая, содержащая биссектрису угла A, делит отрезок XY пополам. (*Жюри*)

4. В квадрате 100×100 отмечены k клеток таким образом, что при любом разрезании квадрата на два прямоугольника по линиям сетки один из прямоугольников содержит хотя бы 100 отмеченных клеток. При каком наименьшем значении k это возможно? (*С. Иванов*)

. . . .

Олимпиада 2004 года. II тур. 10 класс. Выводная аудитория.

5. Дан треугольник ABC. Некоторая окружность касается стороны AC в точке B_1 и продолжений сторон AB и BC в точках C_1 и A_1 соответственно. Окружность с центром в точке A и радиусом AB_1 вторично пересекает прямую A_1B_1 в точке L. Докажите, что точки C_1, A, B_1 и середина отрезка LA_1 лежат на одной окружности. (*Ф. Бахарев*)

6. Из картона вырезаны два одинаковых правильных 111-угольника. Вершины каждого из них занумерованы числами от 1 до 111 в произвольном порядке. Докажите, что их можно наложить один на другой (возможно, перевернув) так, чтобы никакие две вершины с одинаковым номером не совпали. (*С. Берлов*)

7. Последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots$ задается следующим образом: $a_1 = 1$, а если $n \geqslant 2$, то a_n — это наименьшее натуральное число, не встречающееся среди чисел $a_1, \ldots, a_{n-1}$ и такое, что $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ делится на n. Докажите, что $a_{a_n} = n$ при всех n. (*О. Ижболдин*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2004 года ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 11 класс.

---

1. Дано несколько квадратных трехчленов, каждый из которых имеет два корня. Сумма всех этих трехчленов равна 0. Докажите, что среди этих трехчленов найдутся два, разность которых имеет корень. (*С. Берлов, С. Иванов*)

2. В квадрате 100×100 отмечены k клеток таким образом, что при любом разрезании квадрата по линиям сетки на два прямоугольника один из прямоугольников содержит хотя бы 100 отмеченных клеток. При каком наименьшем значении k это возможно? (*С. Иванов*)

3. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки K и L соответственно так, что $KB = LC$. Точка X симметрична K относительно середины стороны AC, точка Y симметрична L относительно середины стороны AB. Докажите, что прямая, содержащая биссектрису угла A, делит отрезок XY пополам. (*Жюри*)

4. Три простых числа таковы, что произведение любых двух из них — точный квадрат, увеличенный на 6. Докажите, что сумма этих простых чисел — точный квадрат, увеличенный на 9. (*В. Франк, Ф. Петров*)

. . . .

Олимпиада 2004 года. II тур. 11 класс. Выводная аудитория.

5. На сторонах AC и BC треугольника ABC отметили точки P и Q соответственно. Оказалось, что $AB = AP = BQ = 1$, а точка пересечения отрезков AQ и BP лежит на вписанной окружности треугольника ABC. Найдите периметр $\triangle ABC$. (*К. Кохась, Д. Карпов*)

6. Последовательность натуральных чисел $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ такова, что $a_1 = 1$, а для $n \geq 2$ a_n — это наименьшее натуральное число, не встречающееся среди чисел $a_1, \ldots, a_{n-1}$ и такое, что $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ делится на n. Докажите, что $a_{a_n} = n$. (*О. Ижболдин*)

7. Любые две из 100 волейбольных команд сыграли между собой ровно один матч. Докажите, что командам можно присвоить обозначения $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$ таким образом, что A_1 выиграла у A_2, A_2 выиграла у A_3, …, A_{99} выиграла у A_{100} и A_1 выиграла у A_{100}. (*С. Берлов*)