САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2003 года ПО МАТЕМАТИКЕ

Отборочный тур. 9 класс.

1. Десять школьников стоят в ряд. Каждую минуту какие-то двое соседних школьников меняются местами. Через некоторое время выяснилось, что каждый из школьников успел побывать на первом и последнем местах. Докажите, что прошло не менее 65 минут. (*С. Берлов*)

2. Дан четырехугольник $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке L. На стороне AD лежит такая точка F, что $\angle FBC = 2\angle FAC$, $\angle FCB = 2\angle FDB$, $\angle AFB = \angle DFC$. Докажите, что прямые AB, CD и FL пересекаются в одной точке. (*Ф. Бахарев*)

3. Два сумасшедших геометра по очереди отмечают точки на плоскости, причем после каждого хода любые три отмеченные точки должны образовывать треугольник площадью не меньше 1 и не больше 1000. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из геометров имеет выигрышную стратегию? (*Ф. Петров*)

4. Докажите, что при любом натуральном n число $n!$ обладает свойством: к любому его делителю, отличному от самого $n!$, можно прибавить такой делитель $n!$, что сумма снова будет делителем $n!$.

(*А. Голованов, А. Храбров, Д. Ростовский, С. Иванов*)

5. Ребра графа покрашены в четыре цвета таким образом, что у любого пути из трех ребер первое и третье ребро покрашены в разные цвета (начало и конец пути могут совпадать). Докажите, что вершины этого графа можно покрасить в пять цветов таким образом, что любые две соединенные ребром вершины были покрашены в разные цвета. (*С. Берлов, Д. Карпов, А. Пастор*)

6. Точка K — середина чевианы AD треугольника ABC. Точка X на отрезке KC такая, что $\angle ABK = \angle XBC$. Оказалось, что $KX \cdot BD = CX \cdot CD$. Докажите, что $\angle BAX = \angle BCX$. (*Ф. Бахарев*)

7. У деда Мороза есть n *различных* подарков и несколько *одинаковых* мешков. В каждом мешке лежат ровно два предмета (два мешка, два подарка или мешок и подарок). В частности, тот единственный мешок, который дед Мороз держит на плече, тоже содержит два предмета. Сколькими способами можно разложить подарки по мешкам? (*К. Кохась*)

8. Для чисел $a_1, \ldots, a_{10}$ и $b_1, \ldots, b_{10}$ докажите неравенство

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{10}^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_{10}^2) \geq$$

$$\geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_{10}b_{10})^2 +$$

$$+(a_1b_2 - a_2b_1 + a_3b_4 - a_4b_3 + a_5b_6 - a_6b_5 + a_7b_8 - a_8b_7 + a_9b_{10} - a_{10}b_9)^2.$$

(*McLaughlin H. W.*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2003 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Отборочный тур. 10 класс.

1. Дан квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + ax + b$. На отрезке $(0,1)$ взята такая точка p, что $p \neq -\frac{a}{2}$ и $f(b - f(p)) > f(p)$. Докажите, что на отрезке $(0,1)$ найдется такая точка $q \neq p$, что $f(p) = f(q)$. *(А. Храбров)*

2. На диагонали AC вписанного четырехугольника $ABCD$ взята точка L такая, что $AB = AL$. На луче DC взята точка F такая, что $DB = DF$. Точка E симметрична B относительно AD. Докажите, что точки F, L и E лежат на одной прямой. *(Ф. Бахарев)*

3. Натуральные числа n и d таковы, что $n! \vdots d$ и $d < n!$. Докажите, что найдется такое натуральное число f, что $n! \vdots f$ и $n! \vdots d + f$ $(n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n)$.
(А. Голованов, А. Храбров, Д. Ростовский, С. Иванов)

4. На одной из вершин правильного 4006-угольника стоит фишка. Два игрока играют в следующую игру: сначала первый игрок отмечает одну из вершин 4006-угольника. После этого они по очереди перемещают фишку по следующим правилам: фишку можно перемещать либо по главной диагонали, либо по кратчайшей (т. е. соединяющей две вершины, идущие через одну) диагонали 4006-угольника. При этом нельзя возвращать фишку в ту вершину, из которой она только что пришла. Докажите, что второй игрок всегда сможет своим ходом поставить фишку в отмеченную первым игроком вершину. *(А. Дюбина)*

5. Точка K — середина чевианы AD треугольника ABC. Точка X на отрезке KC такая, что $\angle ABK = \angle XBC$. Оказалось, что $S_{AKC} = S_{KBX}$. Докажите, что $\angle BAX = \angle BCX$. *(Ф. Бахарев)*

6. На доске написано натуральное число. С ним можно проделывать следующую операцию: вычесть 1 из всех его ненулевых цифр, после чего дописать в конце числа количество этих единиц. (Например, $11011321 \to 2107$.) Из каких восьмизначных чисел при помощи нескольких таких операций можно получить число 7? *(А. Пастор)*

7. Ребра графа покрашены в четыре цвета таким образом, что у любого пути из трех ребер первое и третье ребро покрашены в разные цвета (начало и конец пути могут совпадать). Докажите, что вершины этого графа можно покрасить в четыре цвета правильным образом (т. е. так, чтобы любые две соединенные ребром вершины были покрашены в разные цвета). *(С. Берлов, Д. Карпов, А. Пастор)*

8. Найдите все такие пары натуральных чисел a, $b > 1$, что $a^b - 1$ делится на b^a. *(Ф. Петров)*

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2003 года ПО МАТЕМАТИКЕ
Отборочный тур. 11 класс.

---

1. При каких k из фигурок, представляющих собой три стороны единичного квадратика, можно сложить каркас клетчатого квадрата $k \times k$, разбитого на единичные квадратики? (*Ф. Бахарев*)

2. Угол разделен выходящими из его вершины лучами на $2n+1$ равных углов. Эти углы высекают на некоторой прямой $2n+1$ отрезок. Докажите, что сумма длин 1-го, 3-го, ..., $(2n+1)$-го отрезков больше суммы длин остальных отрезков. (*К. Кноп*)

3. На доске написаны три натуральных числа. Разрешается прибавить к одному из них другое и написать на доску сумму, стерев одно из слагаемых (напирмер, из тройки 8, 9, 10 можно получить тройку 8, 19, 10). Докажите, что можно добиться того, чтобы какие-то два написанных на доске числа были равны. (*С. Иванов*)

4. Можно ли функцию $f(x) = 2^x + 3^x + 9^x$ представить в виде суммы конечного числа вещественных периодических функций? (*Фольклор*)

5. Докажите, что в любом бесконечном подмножестве натурального ряда найдутся два элемента, сумма которых имеет простой делитель, больший миллиона. (*Ф. Петров*)

6. В государстве 2003 города. Они соединены дорогами с двусторонним движением так, что между любыми двумя городами есть единственный путь; причем он проходит не более, чем по 8 дорогам. Город называется захолустным, если из него выходит не более 8 дорог. Докажите, что найдется город, соединенный как минимум с 8 захолустными городами. (*А. Пастор*)

7. В треугольнике ABC оказалось, что $3AC = AB + BC$. Вписанная в треугольник окружность касается сторон AB и BC в точках K и L соответственно. DK и LE — диаметры вписанной окружности. Докажите, что точки пересечения прямых AE и CD с прямой KL равноудалены от середины AC. (*Ф. Бахарев*)

8. В пространстве отмечено $1000n^3$ точек, $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что найдутся два треугольника с вершинами в этих точках, отношение площадей которых не меньше n. (*Ф. Петров*)