САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2002 года ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 6 класс.

1. Приведите пример двузначного числа, у которого произведение цифр, умноженное на сумму цифр, равно 84. (*А. Железняк*)

2. Имеется 21 карточка с числами: 4 карточки с единицей, 2 карточки с двойкой, 7 карточек с тройкой и 8 — с четверкой. Костя сложил из двадцати карточек прямоугольник 4×5. Известно, что суммы чисел во всех вертикальных рядах этого прямоугольника равны между собой, и суммы чисел во всех горизонтальных рядах тоже равны между собой. Какая карточка осталась у Кости? Не забудьте обосновать ответ. (*К. Кохась*)

3. У ослика Иа-Иа есть 100 палочек. Длина каждой палочки — 1 см или 3 см. Докажите, что, сломав не более одной палочки, Иа-Иа сможет из всех палочек сложить прямоугольник (ослик ломает палочку на две части). (*К. Кохась*)

4. У бедного дехканина было 70 лошадей и 6 верблюдов. Он продал несколько верблюдов и на часть вырученных денег купил 10 лошадей. Мог ли он вместо этого продать все, добавить еще 15 золотых и купить 50 верблюдов? (Лошадь и верблюд стоят целое число золотых.) (*О. Малева*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2002 года ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 7 класс.

1. Можно ли составить три несократимые дроби, произведение которых равно 1, использовав в качестве числителей и знаменателей этих дробей шесть чисел из набора $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$? (Каждое число можно использовать один раз или не использовать вовсе.)

2. Расстояние от Гадюкино до Мартышкино не менее 9 км. Деревни соединены прямолинейным шоссе. На расстоянии не менее 1 км и не более 3 км от Гадюкино на обочине шоссе растет береза, а на расстоянии не менее 5 км и не более 7 км от Гадюкино, тоже на обочине, растет дуб. Точно посередине между березой и дубом зарыт клад, причем это место находится не дальше 4 км от Мартышкино. На каком расстоянии от Гадюкино зарыт клад?

3. У ослика Иа-Иа есть 100 палочек. Длина каждой палочки — 1 см или 3 см. Докажите, что, сломав не более одной палочки, Иа-Иа сможет из всех палочек сложить прямоугольник (ослик ломает палочку на две части).

4. 100 грустных мартышек кидаются друг в друга одним кокосовым орехом. Грустная мартышка, попавшая орехом в другую грустную мартышку, становится веселой и больше уже не грустнеет. Мартышка, в которую попали, выбывает из игры. Каких мартышек больше выбыло из игры — веселых или грустных — к моменту, когда в игре осталась одна мартышка? (*Е. Сопкина*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2002 года ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 8 класс.

---

1. В таблице 3×3 расставлены положительные числа. Произведение чисел в каждой строке и в каждом столбце равно 1, а произведение чисел в любом квадрате 2×2 равно 2. Какое число стоит в центре?

(*С. Иванов*)

2. $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, $\angle CBD=\angle CAB$, $\angle ACD=\angle BDA$. Докажите, что $\angle ABC=\angle ADC$. (*Ф. Бахарев*)

3. На какое наибольшее количество нулей может оканчиваться произведение трех натуральных чисел, если их сумма равна 407?

(*С. Берлов*)

4. При проверке диктанта в $8^{\text{а}}$ классе оказалось, что грубые ошибки составляют более четверти всех ошибок. Если бы каждый ученик сделал в 3 раза больше грубых ошибок и на 2 больше негрубых, то число грубых ошибок стало бы ровно в 5 раз меньше числа негрубых. Докажите, что по крайней мере треть класса написала диктант вообще без ошибок.

(*К. Кохась*)

5. В ряд выписаны 40 различных чисел из интервала $(0,1)$. Сумма чисел, стоящих на местах с четными номерами, на 1 больше, чем сумма чисел, стоящих на местах с нечетными номерами. Докажите, что в ряду найдется число, которое меньше каждого из двух своих соседей.

(*С. Иванов*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2002 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
I ТУР. 9 КЛАСС.

---

1. Сумма двух делителей числа 160000 равна 1025. Найдите эти делители. (*О. Ванюшина*)

2. У ослика Иа-Иа есть 100 палочек. Докажите, что, сломав не более двух из них (ослик ломает палочки на две части), он может из всех палочек сложить прямоугольник. (*К. Кохась*)

3. В параллелограмме $ABCD$ $\quad AB + CD = AC$. На стороне BC находится такая точка K, что $\angle ADB = \angle BDK$. Найдите $BK : KC$.
(*Ю. Лифшиц*)

4. Докажите для чисел a, b, $c \in [0,1]$ неравенство

$$a^{17} - a^{10}b^7 + b^{17} - b^{10}c^7 + c^{17} - c^{10}a^7 \leq 1\,.$$

(*Ю. Лифшиц, Ф. Петров*)

5. На координатной плоскости отмечены точки $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(3,0)$, $D(4,0)$, $E(-2,5)$, $F(-1,5)$, $G(8,5)$, $H(9,5)$. Может ли график квадратного трехчлена пересекать четыре отрезка: AB, CD, EF, GH?
(*К. Кохась, Ф. Петров*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2002 года ПО МАТЕМАТИКЕ

I тур. 10 класс.

---

1. У квадратного трехчлена $f(x) = x^2 + ax + b$ два корня, один из них принадлежит промежутку $(0, 1)$, а второй — не принадлежит этому промежутку. Докажите, что $f(b) \leq 0$. (*А. Храбров*)

2. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Описанные окружности треугольников AOB и COD пересекаются на стороне AD. Докажите, что $AO > AB$. (*Ю. Лифшиц*)

3. Положительное число x таково, что $[x] \cdot \{x\} = 100$. Чему может быть равно число $[x^2] - [x]^2$? (Как обычно, $[y]$ — это целая часть числа y, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее y; $\{y\} = y - [y]$ — дробная часть числа y.) (*А. Храбров*)

4. Конструктор “Елки-палки” состоит из палочек по 8 и 9 см. Их суммарная длина равна 18 м (в конструкторе есть палочки обоих типов). Докажите, что из *всех* этих палочек можно сложить равносторонний восьмиугольник. (*Муз. К. Кохася, сл. Д. Карпова и А. Пастора*)

5. В ряд выписаны 40 двузначных чисел. Сумма чисел, стоящих на местах с четными номерами, на 72 больше, чем сумма чисел, стоящих на местах с нечетными номерами. Докажите, что в ряду найдется число, которое не превосходит каждого из двух своих соседей. (*С. Иванов*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2002 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 11 класс.

1. У Саши есть несколько палочек по 5 и 6 см, суммарная длина палочек — 6 м. Докажите, что из всех палочек можно сложить правильный десятиугольник. (*по мотивам задачи 10.4*)

2. Дана функция $f(x) = \lg[x] + \lg\{x\}$. Для некоторого вещественного числа a оказалось, что $f(a) = 2$. Докажите, что $f(a^2) > 4$. (Как обычно, $[x]$ обозначает целую часть x, $\{x\} = x - [x]$ — дробная часть x.)

(*А. Храбров*)

3. В таблице 11×11 расставлены положительные числа. Известно, что произведение чисел в каждой строке и в каждом столбце равно 1, а произведение чисел в каждом квадрате 3×3 равно 2. Найдите произведение чисел в первой и второй клетках третьей строки.

(*С. Иванов, А. Храбров*)

4. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки C_1 и B_1 соответственно. Отрезки BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O. На плоскости взята такая точка D, что AB_1DC_1 — параллелограмм. Докажите, что если D лежит внутри треугольника ABC, то площадь четырехугольника AB_1OC_1 меньше площади треугольника BOC. (*А. Храбров*)

5. Последовательность $\{x_n\}$ задана начальными условиями $x_0 = 1$, $x_1 = 6$ и соотношением

$$x_{n+1} = \begin{cases} x_n + \sin x_n, & \text{если } x_n > x_{n-1}; \\ x_n + \cos x_n, & \text{если } x_n \le x_{n-1}. \end{cases}$$

Докажите, что $x_n < 100$ при всех натуральных n. (*К. Кохась*)