САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2002 года ПО МАТЕМАТИКЕ
Отборочный тур. 9 класс.

---

1. Число $\overline{a0a0\ldots a0b0c0c0\ldots c0c}$ (цифры a и c написаны по 1001 раз) делится на 37. Докажите, что $b = a + c$.

2. В трапеции $ABCD$ длина боковой стороны AB равна сумме длин оснований AD и BC. Докажите, что биссектрисы углов A и B пересекаются на стороне CD.
(*Ф. Бахарев*)

3. Может ли сумма попарных расстояний между вершинами 25-вершинного дерева быть равна 1225? (*Ю. Лифшиц, Ф. Петров*)

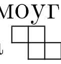
4. На доске выписаны числа от 5 до 10. Раз в минуту Костя стирает 3 или 4 наименьших числа и дописывает 7 или 8 чисел, следующих за наибольшим. Докажите, что сумма чисел на доске никогда не будет степенью тройки. (*К. Кохась*)

5. При каком наибольшем α любые вещественные числа

$$0 = a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_{11} = 1$$

можно разбить на две группы, средние арифметические в которых отличаются не меньше чем на α? (*М. А. Лифшиц, Ю. Лифшиц, Ф. Петров*)

6. Пусть O — центр описанной окружности остроугольного неравнобедренного треугольника ABC, точка C_1 симметрична C относительно O, D — середина стороны AB, K — центр описанной окружности треугольника ODC_1. Докажите, что точка O делит пополам отрезок прямой OK, лежащий внутри угла ACB.
(*Д. Джукич*)

7. Можно ли в прямоугольнике 17×101 расставить числа от 1 до 1717 так, чтобы в каждой фигурке вида , целиком помещающейся в прямоугольнике, сумма чисел делилась бы на 17 или на 101? (*К. Кохась*)

8. Многоугольник F, никакие три вершины которого не лежат на одной прямой, можно двумя способами разбить непересекающимися диагоналями на треугольники. Докажите, что некоторые четыре вершины F образуют выпуклый четырехугольник, лежащий целиком в F. (*Ю. Лифшиц*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2002 года ПО МАТЕМАТИКЕ
Отборочный тур. 10 класс.

1. Простое число $p > 3$ таково, что уравнение $p^k + p^\ell + p^m = n^2$ имеет решение в натуральных числах. Докажите, что $p + 1$ делится на 8. *(А. Храбров)*

2. Докажите, что любые 13 чисел

$$0 = x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_{12} \leq x_{13} = 1$$

можно разбить на две группы, средние арифметические чисел в которых отличаются не менее, чем на $\frac{13}{24}$. *(М. А. Лифшиц, Ю. Лифщиц, Ф. Петров)*

3. У алхимика имеется 50 веществ. Он умеет любые 49 веществ, взятых в равных долях, превращать в оставшееся вещество, не меняя суммарной массы. Докажите, что он может добиться того, чтобы всех 50 веществ у него было поровну.

(С. Иванов)

4. На сторонах AB и BC вписанного четырехугольника $ABCD$ отмечены точки X и Y соответственно такие, что $XBYD$ — параллелограмм. Точки M и N — середины диагоналей AC и BD, прямые AC и XY пересекаются в точке L. Докажите, что точки M, N, L и D лежат на одной окружности.

(Д. Джукич, С. Берлов, Д. Карпов, А. Пастор)

5. Дано 64 вершины. Двое играют в следующую игру: каждым ходом первый игрок соединяет ребром две еще не соединенные вершины, а второй произвольным образом ориентирует это ребро (т. е. вводит на этом ребре направление движения). Второй игрок выигрывает, если после 1959 ходов получится связный граф, а первый — в противном случае. Кто выигрывает при правильной игре? *(А. Пастор)*

6. Берег озера имеет вид выпуклого центрально-симметричного стоугольника $A_1A_2\ldots A_{100}$ с центром симметрии O. Внутри озера расположен остров $B_1B_2\ldots B_{100}$ такой, что B_i — середина отрезка OA_i для всех i от 1 до 100. На острове находится тюрьма с высоким забором по краям. В противоположных точках берега находятся два охранника. Докажите, что они видят весь берег озера. *(Ф. Петров)*

7. Секретный код к любому из сейфов ФБР — это натуральное число от 1 до 1700. Двое шпионов узнали по одному коду каждый и решили обменяться информацией. Согласовав заранее свои действия, они встретились на берегу реки возле кучи из 26 камней. Сначала первый шпион кинул в воду несколько камней, потом — второй, потом опять первый и так далее до тех пор, пока камни не кончились. После этого шпионы разошлись. Каким образом могла быть передана информация? (Шпионы не сказали друг другу ни слова.) *(Д. Челкак, К. Кохась)*

8. По целочисленным точкам прямой прыгает кузнечик. Длина каждого его прыжка равна единице. Во время каждого прыжка кузнечик напевает одну из $\frac{p-1}{2}$ известных ему песенок (p — нечетное простое число). Докажите, что количество различных музыкальных маршрутов кузнечика, состоящих из не более чем $p - 1$ прыжков и возвращающих его в конце в начальную точку, делится на p.

(М. Всемирнов)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2002 года ПО МАТЕМАТИКЕ
Отборочный тур. 11 класс.

---

1. В каждой клетке таблицы 37×5 (37 строк, 5 столбцов) стоит число от 1 до 10. В каждой строке числа упорядочены слева направо в неубывающем порядке. На любой диагональной линии направления вправо-вниз все числа равны. Докажите, что в таблице есть строка, содержащая 5 одинаковых чисел. (*С. Иванов*)

2. Через центр вписанной окружности четырехугольника $ABCD$ проведена прямая. Она пересекает сторону AB в точке X и сторону CD в точке Y; углы $\angle AXY$ и $\angle DYX$ равны. Докажите, что $AX/BX = CY/DY$. (*С. Иванов*)

3. Дана последовательность $a_n = F_n^n$, где F_n — числа Фибоначчи ($F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$). Является ли ограниченной последовательность

$$b_n = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \ldots + \sqrt{a_n}}}\ ?$$

4. Секретный код к любому из сейфов ФБР — это натуральное число от 1 до 900. Двое шпионов узнали по одному коду каждый и решили обменяться информацией. Согласовав заранее свои действия, они встретились на берегу реки возле кучи из 26 камней. Сначала первый шпион кинул в воду несколько камней, потом — второй, потом опять первый и т. д. до тех пор, пока камни не кончились. После этого шпионы разошлись. Каким образом могла быть передана информация? (Шпионы не сказали друг другу ни слова.) (*Д. Челкак, К. Кохась*)

5. Даны такие натуральные числа a и b, что $2a+1$ и $2b+1$ взаимно просты. Каким может быть наибольший общий делитель чисел $2^{2a+1} + 2^{a+1} + 1$ и $2^{2b+1} + 2^{b+1} + 1$?

6. Вписанная в треугольник ABC окружность касается сторон BC, CA и AB в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Через точку A_1 проведена прямая ℓ, перпендикулярная отрезку AA_1. Она пересекается с прямой B_1C_1 в точке X (см. рисунок). Докажите, что прямая BC делит отрезок AX пополам.

7. На доске написано натуральное число. Дима с Сашей играют в следующую игру. Дима своим ходом называет некоторое натуральное число x, а Саша меняет число, записанное на доске, либо прибавляя к нему x, либо вычитая из него x (по своему выбору). Дима стремится к тому, чтобы на доске появилось число, равное какой-нибудь степени заданного натурального числа k (в том числе и $k^0 = 1$). При каких значениях k Дима сможет добиться этого независимо от исходного числа, записанного на доске?

8. Найдите все непрерывные функции $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ такие, что для любых положительных x и y $\quad f(x)f(y) = f(xy) + f(x/y)$. (*Ф. Бахарев, А. Беленький*)