САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2002 года ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 9 класс.

---

1. Натуральное число называется симметричным, если оно не изменяется при переворачивании десятичной записи (например, 2002 — симметричное число). Докажите, что если a и $3a$ — симметричные числа, то и $2a$ — симметричное число.

(*Ф. Петров*)

2. Каждый сотрудник компании "Кака-кола", имеющий четное число знакомых среди сотрудников, послал им по письму, а каждый из остальных сотрудников компании послал по письму всем незнакомым. Тедди получил 99 писем. Докажите, что он получит еще хотя бы одно письмо. (*Ю. Лифшиц*)

3. На продолжении каждой стороны A_kA_{k+1} правильного многоугольника $A_1A_2\dots A_n$ за точку A_{k+1} отмечена точка B_{k+1}. При этом оказалось, что периметры всех треугольников $A_kB_kB_{k+1}$ равны. Докажите, что равны и сами треугольники.

(*С. Иванов*)

4. У Гарри есть мышонок и много-много лягушат. Гарри может превращать лягушат в мышат или наоборот по следующему правилу: если мышат и лягушат не поровну, то количество тех животных, которых было меньше половины, удваивается. После того как Гарри сумел проделать эту операцию 17 раз подряд, мышат впервые оказалось в два раза больше, чем лягушат. Сколько животных было у Гарри?

(*Ю. Лифшиц*)

Награждение победителей олимпиады состоится 7 апреля в 11.00 в Актовом зале СПбГУ (Университетская наб. 7/9)

....

Олимпиада 2002 года. II тур. 9 класс. Выводная аудитория.

5. Костя выложил из палочек целочисленной длины квадрат 10×10 (вместе с границей), разбитый на клеточки 1×1. Палочки не пересекаются во внутренних точках. Какое наименьшее число палочек единичной длины могло быть при этом использовано? (*К. Кохась*)

6. a, b, c — положительные числа. Федя нашел сумму положительных корней уравнений

$$x^2 = ax + b, \quad x^2 = bx + c \quad \text{и} \quad x^2 = cx + a\,,$$

а Юра — сумму положительных корней уравнений

$$x^2 = ax + a, \quad x^2 = bx + b \quad \text{и} \quad x^2 = cx + c\,.$$

Эти суммы оказались различны. У кого из мальчиков сумма больше?

7. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка K такая, что $AK = 2KC$, и $\angle ABK = 2\angle KBC$. F — середина стороны AC, L — проекция A на BK. Докажите, что прямые FL и BC перпендикулярны. (*Ф. Бахарев*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2002 года ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 10 класс.

---

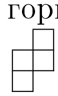
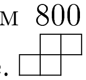
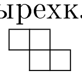
1. Даны три квадратных трехчлена с попарно различными старшими коэффициентами. Графики любых двух из них имеют ровно одну общую точку. Докажите, что все три графика имеют ровно одну общую точку. (*М. Пратусевич, Ю. Лифшиц*)

2. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$ такой, что $\angle ABC = 90^\circ$, $AC = CD$ и $\angle BCA = \angle ACD$. Точка F — середина отрезка AD. Отрезки BF и AC пересекаются в точке L. Докажите, что $BC = CL$. (*Ф. Бахарев*)

3. Пусть a, b, c и x, y, z — положительные числа такие, что $a+x = b+y = c+z = 1$. Докажите неравенство

$$(abc + xyz)\left(\frac{1}{ay} + \frac{1}{bz} + \frac{1}{cx}\right) \geq 3.$$

(*А. Храбров*)

4. Прямоугольник 2002×100 (сторона длины 2002 расположена горизонтально) разбит на доминошки (т. е. прямоугольники 1×2) и фигурки вида . Известно, что в этом разбиении не более 600 доминошек. Докажите, что как минимум 800 четырехклеточных фигур в данном разбиении расположены горизонтально (т. е.  или ). (*Д. Карпов, А. Пастор*)

Награждение победителей олимпиады состоится 7 апреля в 11.00 в Актовом зале СПбГУ (Университетская наб. 7/9)

. . . .

Олимпиада 2002 года. II тур. 10 класс. Выводная аудитория.

5. С числом разрешается производить следующие операции: 1° возводить в любую натуральную степень; 2° отрезать последние две цифры, умножить образованное ими число на 3, и прибавить к числу, образованному остальными цифрами. Можно ли с помощью таких операций из числа 81 получить 82? (*К. Кохась*)

6. На диагоналях AC и BD вписанного четырехугольника $ABCD$ выбраны точки M и N соответственно такие, что $\frac{BN}{DN} = \frac{AM}{CM}$ и $\angle BAD = \angle BMC$. Докажите, что $\angle ANB = \angle ADC$. (*Ф. Бахарев*)

7. В стране не менее 100000 городов, из каждого города выходит ровно 2001 дорога. Верно ли, что всегда можно закрыть часть дорог (не менее одной, но не все) таким образом, чтобы после этого из всех городов выходило поровну дорог?

(*М. Островский*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2002 года ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 11 класс.

---

1. Даны три квадратных трехчлена с попарно различными старшими коэффициентами. Графики любых двух из них имеют ровно одну общую точку. Докажите, что все три графика имеют ровно одну общую точку. (*М. Пратусевич, Ю. Лифшиц*)

2. I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Окружность, проходящая через I, касается сторон AB и AC в точках X и Y соответственно. Докажите, что отрезок XY касается вписанной в треугольник ABC окружности. (*С. Берлов*)

3. Даны положительные числа a, b, c и x, y, z, удовлетворяющие условию $a+x = b+y = c+z = 1$. Докажите неравенство

$$(abc + xyz)\left(\frac{1}{ay} + \frac{1}{bz} + \frac{1}{cx}\right) \geq 3.$$

(*А. Храбров*)

4. На клетчатой плоскости лежат 100 уголков из 3 клеток и несколько прямоугольников 1×3. Известно, что из всех этих фигурок, не поворачивая их, можно сложить некоторый прямоугольник. Отличница Оля взяла 96 уголков и, не поворачивая их, сложила из них 48 прямоугольников 2×3. Докажите, что из оставшихся 4 уголков (также не поворачивая их) можно сложить еще два прямоугольника 2×3.
(*О. Ванюшина*)

Награждение победителей олимпиады состоится 7 апреля в 11.00 в Актовом зале СПбГУ (Университетская наб. 7/9)

. . . .

Олимпиада 2002 года. II тур. 11 класс. Выводная аудитория.

5. На стороне AC треугольника ABC нашлась точка K такая, что $AK = 2KC$ и $\angle ABK = 2\angle KBC$. F — середина стороны AC, L — проекция A на BK. Докажите, что прямая FL перпендикулярна BC. (*Ф. Бахарев*)

6. Последовательность $\{a_n\}$ задана соотношением

$$a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{2}, \quad \text{если } a_n \geq 1 \qquad \text{и} \qquad a_{n+1} = \frac{2a_n}{1 - a_n}, \quad \text{если } a_n < 1.$$

Известно, что a_0 — натуральное, $a_n \neq 2$ при $n = 1, 2, \ldots, 2001$ и $a_{2002} = 2$. Найдите a_0.

7. В зоопарке имеется двое двухчашечных весов для взвешивания животных. На одной из чашек первых весов стоит слон, а на одной из чашек вторых — верблюд. Известно, что слон и верблюд весят целое число килограммов и их суммарный вес не превосходит 2 тонн. В зоопарк доставили набор гирь, весящих целое число килограммов, суммарный вес которых 2 тонны. Выяснилось, что, какими бы ни были веса животных, можно распределить некоторые из гирь по всем 4 чашкам так, чтобы и те и другие весы пришли в равновесие. Какое наименьшее число гирь могли привести в зоопарк? (*А. Храбров*)